LILIANA PAVEL IRINA RIZZOLI

ELEMENTE de ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ și ANALIZĂ NUMERICĂ

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

LILIANA PAVEL **IRINA RIZZOLI**

ELEMENTE DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ ȘI ANALIZĂ NUMERICĂ

LILIANA PAVEL IRINA RIZZOLI

ELEMENTE DE ANALIZĂ FUNCŢIONALĂ ŞI ANALIZĂ NUMERICĂ

Editura Universității din Bucureşti
– 2002 –

Şos. Panduri 90-92, Bucureşti - 76235; Tel./Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
PAVEL, LILIANA
Elemente de analiză funcţională şi analiză numerică / Liliana Pavel, Irina Rizzoli. - Bucureşti : Editura Universităţii din Bucureşti, 2002
228 p. ; 17 cm.
Bibliogr.
ISBN 973-575-671-4

I. Rizzoli, Irina

517

Cuprins

Elemente de analiză funcțională și analiză numerică

Prefață

Lucrarea de faţa conţine elemente de analiză funcţională şi analiză numerică.

Analiza numerică este un domeniu al matematicii apărut relativ recent ca rezultat al utilizarii calculatoarelor în rezolvarea unor probleme matematice. Multe din rezultatele de bază ale acestei discipline sunt de analiză funcţională care oferă suport teoretic, metode şi mijloace specifice pentru soluţionarea a numeroase probleme de analiză numerică.

Această carte îşi propune să prezinte elementele de bază ce fac obiectul cursurilor de Analiză funcţională şi Analiză numerică, pentru studenţii facultăţilor de matematică. Prin urmare, ea se adresează acestora, dar şi studenţilor de la facultăţile tehnice, matematicienilor şi tuturor celor ce doresc o intoducere în studiul celor doua discipline.

Cartea este structurata în două părţi. Prima, dedicată Analizei funcţionale liniare, autor Liliana Pavel, conţine cinci capitole. La început sunt expuse noţiuni şi rezultate referitoare la spaţii liniare, operatori şi funcţionale liniare (Capitolul 1) dupa care, se prezintă elemente de teoria spaţiilor Banach şi Hilbert (Capitolul 2). Capitolul 3 este dedicat operatorilor liniari şi continui pe spaţii normate, studiul acestora fiind aprofundat în Capitolul 4 în care sunt puse în evidenţă proprietăţi specifice operatorilor liniari mărginiţi, generate de geometria spaţiilor Hilbert. În Capitolul 5 sunt prezentate elemente de teorie spectrală, dându-se o atenţie specială operatorilor compacţi si autoadjuncţi pe spaţii Hilbert.

Partea a doua a cărţii de faţă, formată din Capitolele 6–10, autor Irina Rizzoli, conţine elemente de Analiză numerică. Aici se urmăreşte succesiv o prezentare a metodelor numerice de rezolvare a sistemelor liniare (Capitolul 6), metodelor numerice de rezolvare a ecuaţiilor neliniare (Capitolul 7), metodelor de aproximare polinomială a funcţiilor (Capitolul 8), metodelor numerice pentru aproximarea integralelor (Capitolul 9) şi metodelor numerice de rezolvare a unor ecuaţii diferenţiale (Capitolul 10).

Conţinutul cărţii este teoretic, rezultatele fiind însă bogat exemplificate. Totuşi, menţionăm că pentru aprofundarea cunoştintelor dobândite, cititorul interesat ar trebui să parcurgă un număr de probleme aplicative, pe care le poate gasi, de exemplu în [9], [19], [23] din lista de referinţe, acestea fiind culegeri de probleme însoţite de soluţii complete.

Sperăm că prezentarea de faţă va permite cititorului o înţelegere a noţiunilor de bază ale analizei funcţionale cât şi o aplicare a acestora în studiul unor metode numerice. Metodele numerice din lucrare sunt selecţionate după performanţă, ca metode de aproximare, cât şi pentru facilităţile oferite în vederea implementării pe calculator.

Dorim să folosim acest prilej să mulţumim colegilor noştri, distinşii profesori Acad. Romulus Cristescu, Gheorghe Grigore, Eugen Câmpu şi Cristina Ştefan pentru o îndelungată şi caldă colaborare.

Liliana Pavel, Irina Rizzoli

Preliminarii

Ne propunem pentru început sa prezentăm notaţiile şi terminologia folosite în această carte. Pentru a uşura citirea carţii, vom aminti şi unele rezultate de topologie ce vor fi utilizate pe parcurs.

Mulţimi şi funcţii

Presupunem că cititorul este familiarizat cu noţiunile elementare de teoria mulţimilor. În afara semnelor uzuale de apartenenţă, incluziune, reuniune şi intersecţie, vom nota complementara unei mulţimi A (în X) cu $X \setminus A$ sau $C_X A$. De obicei simbolurile R, C vor fi folosite pentru mulţimea numerelor reale, respectiv a celor complexe. N este mulţimea numerelor naturale nenule (fără zero).

O familie de mulţimi $\{Z_i\}_{i \in I}$ se numeşte acoperire a mulţimii X dacă $X \subset \bigcup\limits_{i \in I} Z_i$.

O funcţie (aplicaţie) definită pe mulţimea X cu valori în mulţimea Y, va fi notată cu $f : X \longrightarrow Y$ sau $x \longmapsto f(x)$. Dacă $A \subset X$, atunci $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$ este imaginea prin f a mulţimii A şi $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \subset X$ este preimaginea (imaginea inversa prin f) a mulţimii $B \subset Y$. $f(X)$ se numeşte imaginea funcţiei f. X este domeniul lui f. Dacă $f : X \longrightarrow Y$ şi $g : Y \longrightarrow Z$, compunerea funcţiei g cu f, $g \circ f$ este definită pe X cu valori în Z, prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$. Funcţia identitate din X în X , $x \longmapsto x$ va fi notată cu I_X. O funcţie $f : X \longrightarrow Y$ se numeşte injectivă dacă pentru orice y în Y ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie; spunem ca f este surjectivă dacă $f(X) = Y$, deci dacă pentru orice y în Y, ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o soluţie. O funcţie f care este şi injectivă şi surjectivă se numeşte bijectivă. În acest caz, există o funcţie definită pe Y cu valori în X, numită inversa funcţiei f, şi notată cu f^{-1} astfel încât $f \circ f^{-1} = I_Y$ şi $f^{-1} \circ f = I_X$. Restricţia unei funcţii $f : X \longrightarrow Y$ la o submulţime $A \subset X$ va fi notată $f|_A$.

Dacă $\{X_i\}_{i\in I}$ este o familie de mulţimi, produsul lor cartezian, $\prod\limits_{i\in I} X_i$ este mulţimea tuturor aplicaţiilor $x : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ astfel înât $x(i) \in X_i$, $\forall i \in I$. Dacă $i \in I$ proiecţia de indice i, $pr_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ este definită prin $pr_i(x) = x(i)$ (notat cu x_i). În cazul particular a doua mulţimi X_1, X_2, vom folosi pentru produsul lor cartezian notaţia $X_1\times X_2$, deci, acesta poate fi identificat cu mulţimea perechilor ordonate (x_1, x_2), cu $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

O relaţie binară pe X este o submulţime $\mathcal{R}$ a produsului cartezian $X \times X$; dacă $\mathcal{R}$ este o relaţie binară, în mod obişnuit se foloseşte notaţia $x \leq y$ (sau $x \sim y$) în loc de $(x, y) \in \mathcal{R}$. O relaţie se numeşte tranzitivă dacă $\forall x$, y, $z \in X$, $(x, y) \in \mathcal{R}$ şi $(y, z) \in \mathcal{R}$ implică $(y, z) \in \mathcal{R}$; reflexivă dacă $\forall x \in X$, $(x, x) \in \mathcal{R}$; simetrică dacă $\forall x$, $y \in X$, din $(x, y) \in \mathcal{R}$ rezultă $(y, x) \in \mathcal{R}$ şi antisimetrică dacă $\forall x$, $y \in X$, $(x, y) \in \mathcal{R}$ şi $(y, x) \in \mathcal{R}$ implică $x = y$.

O relaţie de echivalenţă, notată uzual cu $\sim$, este o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Dacă $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă pe X şi $x \in X$, mulţimea elementelor din X în relaţie cu $x \in X$ se numeşte clasa de echivalenţă a lui x modulo $\mathcal{R}$, notată cu $\hat{x}$.

O relaţie de ordine parţială pe X este o relaţie $\mathcal{R}$, notată $\leq$ sau $\prec$, care este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Prin mulţime ordonată (parţial) vom înţelege o pereche $(X, \leq)$ unde X este o mulţime nevidă, iar "$\leq$ " o relaţie de ordine pe X. Când $\mathcal{R} = X \times X$, mulţimea X se numeşte total ordonată. Dacă $\mathcal{A}$ este o familie de submulţimi ale lui X ordinea uzuală pe $\mathcal{A}$ este $C \leq D \Leftrightarrow C \subseteq D$; dacă $\mathcal{F}$ este o mulţime de funcţii reale pe X se consideră în mod obişnuit pe $\mathcal{F}$ relaţia de ordine parţiala $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in X$.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonata şi $A \subset X$. Un element $p \in X$ se numeşte majorant (respectiv minorant) al mulţimii A dacă $y \leq p$, $\forall y \in A$ (respectiv $p \leq y$, $\forall y \in A$). Dacă $m \in X$ şi $m \leq x$ implică $x = m$, (adică m nu are majoranţi în X diferiţi de el însuşi), m se numeşte element maximal al lui X; analog, dacă $s \in X$ şi $x \leq s$ implică $x = s$, spunem ca s este element minimal al lui X.

Vom spune ca mulţimea ordonată $(X, \leq)$ este inductiv ordonată dacă orice submulţime total ordonată a lui X (cu ordinea indusă din X), are un majorant în X.

Teoremă. (Lema lui Zorn) *Orice mulţime inductiv ordonată are un element maximal.*

Spunem că o submulţime A a mulţimii ordonate $(X, \leq)$ este majorată (respectiv minorată), dacă admite un majorant (respectiv minorant). Dacă există un majorant (minorant) a aparţinând lui A, a se numeşte cel mai mare (cel mai mic) element al lui A. Spunem ca submulţimea A este mărginită dacă este majorată şi minorată. Dacă A este majorată (respectiv minorată) şi mulţimea majoranţilor (respectiv minoranţilor) are un cel mai mic (respectiv mare) element, spunem ca A admite supremum (respectiv infimum). Cel mai mic majorant (respectiv cel mai mare minorant), dacă există este unic şi se notează cu $\sup A$ (respectiv $\inf A$).

Un şir de elemente din X este o funcţie $x : N \longrightarrow X$. Ca de obicei, notăm $x(n)$ cu x_n şi şirul cu $(x_n)_n$.

Spaţii topologice

Generalităţi. De obicei vom folosi litera τ pentru a indica o topologie şi dacă X este spaţiu topologic cu topologia τ vom nota acest spaţiu cu (X, τ). Dacă $Y \subset X$, vom nota cu $\tau|_Y$ topologia indusă de τ pe Y. Pentru o submulţime A a spaţiului toplogic (X, τ), închiderea, respectiv interiorul său vor fi notate cu $\overline{A}$, respectiv $\overset{\circ}{A}$. Spunem că o submulţime $A \subset X$ este densă în X dacă $\overline{A} = X$. O submulţime $A \subset X$ se numeşte rară X dacă $\overline{A}$ are interiorul vid.

Dacă x este un punct al spaţiului topologic (X, τ) şi $\mathcal{V}_x$ este mulţimea tuturor vecinătăţilor lui x, atunci, o parte $\mathcal{B}_x$ a lui $\mathcal{V}_x$ se numeşte sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x dacă $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $\exists B \in \mathcal{B}_x$, $B \subset V$.

Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte separat (sau spaţiu Hausdorff) dacă $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, există $U \in \mathcal{V}_x$ şi $V \in \mathcal{V}_y$ disjuncte.

Fie (X, τ) şi (Y, σ) spaţii topologice. Spunem că funcţia $f : X \longrightarrow Y$ este continuă dacă $f^{-1}(A) \in \tau$ pentru orice A în σ. Funcţia f se numeşte continuă în punctul $x \in X$ dacă $f^{-1}(A) \in \mathcal{V}_x$ pentru orice $A \in \mathcal{V}_{f(x)}$. O funcţie este continuă dacă şi numai dacă este continuă în orice punct. Spunem ca funcţia $f : X \longrightarrow Y$ este deschisă dacă, $\forall A \in \tau$, $f(A) \in \sigma$. Un homeomorfism este o apicaţie bijectivă $f : X \longrightarrow Y$ care este şi continuă şi deschisă, ceea ce este echivalent cu faptul că atât f cât şi f^{-1} sunt continue. Este clar că prin compunerea a doua funcţii continue, respectiv deschise se obţine o funcţie de acelaşi tip.

Spaţii metrice. Un spaţiu metric este o mulţime X împreună cu o funcţie $d(\cdot, \cdot)$ definită pe $X \times X$ cu valori reale (numită distanţă pe X) având următoarele proprietăţi:

(i) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$;

(ii) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$;

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiului).

Când nu rezultă din context în mod clar care este metrica pe X, vom folosi pentru spaţiul metric respectiv notaţia (X,d). Mulţimea $B(y,r) = \{x \in X \mid d(x,y) < r\}$ se numeşte sfera (bila) deschisă de centru y şi rază $r > 0$. Topologia uzuală pe un spaţiu metric (X,d), τ_d este definită astfel: o mulţime $G \subset X$ este deschisă dacă şi numai dacă $\forall y \in G$, $\exists r > 0$ astfel încât $B(y,r) \subset G$. Să notăm că pentru $\forall x \in X$, familia $\{B(x,r)\}_{r>0}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x. Topologia τ_d este Hausdorff.

Dacă (X_j, d_j), $j = 1, 2, ..., n$, sunt spaţii metrice, topologia produs pe spatiul $\prod_{j=1}^{n} X_j$ este topologia metrică definită de distanţa

$$d((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \max_{j=1,2,\ldots,n} d_j(x_j, y_j).$$

Un şir de elemente $(x_n)_n$ din spaţiul metric (X,d) se numeşte convergent la $x \in X$ ($x_n \to x$ când $n \to \infty$ sau $x_n \xrightarrow{n} x$) dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ există n_ε natural astfel încât $\forall\ n \geq n_\varepsilon$, $d(x, x_n) < \varepsilon$, adică şirul numeric $(d(x,x_n))_n$ converge la zero; x se numeşte limita şirului $(x_n)_n$, şi se notează cu $\lim\limits_n x_n$. Elementele x din închiderea mulţimii $A \subset X$ sunt caracterizate prin faptul că există un şir $(x_n)_n \subset A$ astfel încât $(x_n)_n$ converge la x.

Un şir $(x_n)_n$ din spaţiul metric (X,d) se numeşte şir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0$, există n_ε natural astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_\varepsilon$. Orice şir convergent este Cauchy. Un spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte complet. Amintim următorul rezultat:

Teoremă. *Orice spaţiu metric complet nu este reuniune numărabilă de mulţimi rare (este spaţiu Baire).*

Fie $A \subset X$, $x \in X$. Prin distanţa de la x la A, notată cu $d(x,A)$, înţelegem numărul $\inf\limits_{y \in A} d(x,y)$. Este clar că $d(x,A) = 0$ dacă şi numai dacă $x \in \overline{A}$.

Dacă X, Y sunt spaţii metrice şi f o funcţie din X cu valori în Y, f este continuă în $x \in X$ dacă şi numai dacă $\forall\ (x_n)_n \subset X$, $x_n \xrightarrow{n} x$ rezultă că $f(x_n) \xrightarrow{n} f(x)$.

Mulţimi compacte. Spunem că submulţimea A a spaţiului topologic (X, τ) este compactă dacă din orice acoperire a lui A cu mulţimi deschise se poate extrage o acoperire finită. Orice submulţime închisă a unei mulţimi compacte este ea însăşi compactă. Dacă (X, τ) este Hausdorff, orice mulţime compactă este închisă. Spunem că spaţiul topologic (X, τ) este compact dacă X este o mulţime compactă.

Următoarea caracterizare a compacităţii în spaţii metrice va fi deosebit de utilă.

Teoremă. *Fie (X, d) spaţiu metric şi τ_d topolgia metrică pe X. O submulţime A din X este compactă dacă şi numai dacă orice şir de elemente din A conţine un subşir convergent la un element din A.*

Capitolul 1

Spaţii vectoriale şi operatori liniari

1.1 Spaţii vectoriale

În aceasta secţiune introducem câteva noţiuni elementare de algebră liniară. În cele ce urmează notăm prin K unul dintre corpurile R (al numerelor reale) sau C (al numerelor complexe). Dacă $\alpha = a + bi \in C$, Re $\alpha = a$ şi Im $\alpha = b$. Conjugatul numărului complex α, este $\overline{\alpha} = a - bi$.

Definiţie. Se numeşte spaţiu liniar (vectorial) peste K o mulţime X înzestrată cu o operaţie binară (o aplicaţie din $X \times X$ în X), $(x, y) \longrightarrow x + y$ (numită operaţie de adunare între elemente) şi cu o aplicaţie (din $K \times X$ în X), $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ (numită operaţia de înmulţire cu scalari), satisfăcând următoarele condiţii:
(1) $x + (y + z) = (x + y) + z, \ \forall x, \ y, \ z \in X$;
(2) $x + y = y + x, \ \forall x, \ y \in X$;
(3) $\exists 0 \in X$ astfel încât $0 + x = x + 0, \ \forall x \in X$;
(4) $\forall x \in X$, $\exists(-x) \in X$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
(5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \ \forall \alpha, \ \beta \in K, \ \ x \in X$;
(6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \ \forall \alpha \in K, \ \ x, y \in X$;
(7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \ \forall \alpha, \ \beta \in K, \ \ x \in X$;
(8) $1x = x, \ \forall x \in X$.
Când $K = R$, X se numeşte spaţiu liniar real, iar pentru $K = C$, spaţiu liniar complex.

Notaţii. Pentru A, $B \subset X$ şi $\Lambda \subset K$ notăm

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \text{ şi } \Lambda A = \{\alpha a \mid \alpha \in \Lambda, a \in A\}.$$

Observaţie. Corpul K este spaţiu liniar peste el însuşi, înmulţirea cu scalari fiind înmulţirea din K.

Definiţie. O submulţime Y a spaţiului liniar X se numeşte ***subspaţiu liniar*** al lui X dacă $Y + Y \subset Y$ şi $K\,Y \subset Y$.

Este clar că intersecţia unei familii oarecare de subspaţii liniare ale spaţiului vectorial X este un subspaţiu liniar, fapt care permite să dăm următoarea definiţie:

Definiţie. Fie A o submulţime a spaţiului liniar X. Intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui X care conţin submulţimea A se numeşte *subspaţiul liniar generat* de A, notat cu $\mathrm{Sp}\, A$.

Propoziţia 1.1 *Fie A o submulţime a spaţiului liniar X. Atunci,*

$$\mathrm{Sp}\, A = \{z \in X \mid z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,\ \alpha_j \in K\ ,\ x_j \in A,\ n \in N\ \}.$$

Demonstraţie. Este clar că $\mathrm{Sp}\, A \subset \{z \in X \mid z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \alpha_j \in K, x_j \in A, n \in N\ \}$ deoarece această mulţime este un subspaţiu liniar care conţine pe A. Incluziunea inversă este justificată de faptul că dacă Y este un subspaţiu liniar cu proprietatea $A \subset Y$, atunci, orice element $z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $\alpha_j \in K$, $x_j \in A$, $n \in N$, este în Y.

Ţinând cont de definiţia spaţiului vectorial, următoarele observaţii sunt imediate.

Observaţii. 1) Fie $\{X_j\}_{j\in J}$ o familie de spaţii liniare peste acelaşi corp K. Atunci, $X = \prod_{j\in J} X_j$ devine spaţiu vectorial peste K cu următoarele operaţii:

$$(x_j)_{j\in J} + (y_j)_{j\in J} = (x_j + y_j)_{j\in J}$$
$$\alpha(x_j)_{j\in J} = (\alpha x_j)_{j\in J}$$

Fie $n \in N$. În cele ce urmează vom nota cu $K^n = \prod_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} X_j$, unde $X_j = K$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$. Aşadar, $K^n = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mid \xi_j \in K\}$.

2) Fie X spaţiu vectorial şi Y subspaţiu liniar al său. Definim pe X o relaţie de echivalenţă, $x \sim y \iff x - y \in Y$. Mulţimea $X/Y = \{\hat{x} \mid x \in X\}$(unde $\hat{x} = x + Y$ este clasa de echivalenţă a elementului x) dotată cu operaţiile

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y} \text{ şi } \alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$$

este un spaţiu vectorial.

Definiţie. Fie X spaţiu vectorial peste K. Familia finită $x_1, x_2, ...x_n$ de vectori ai lui X se numeşte *liniar independentă* (peste K) dacă $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, $\alpha_j \in K$ implică $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Spunem că o submulţime B a lui X este liniar independentă dacă orice subfamilie finită de vectori din B este liniar independentă.

Definiţie. O submulţime B din X se numeşte *bază algebrică* a spaţiului liniar X dacă B este liniar independentă şi dacă pentru orice $x \in X$, există $n \in N$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ şi $x_1, x_2, ...x_n \in B$ astfel încât $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$.

Folosind Lema lui Zorn, următoarea propoziţie este imediată:

Propoziţia 1.2 *Orice spaţiu vectorial are o bază algebrică. Mai mult, orice mulţime liniar independentă într-un spaţiu vectorial este conţinută într-o bază.*

Trebuie să notăm că într-un spaţiu vectorial X toate bazele au acelaşi cardinal, numit *dimensiunea* spaţiului vectorial X. Spaţiul se numeşte finit dimensional dacă dimensiunea sa este finită. În caz contrar spaţiul se numeşte infinit dimensional.

1.2 Operatori liniari şi funcţionale liniare

Fie X, Y spaţii vectoriale peste acelaşi corp K.

Definiţie. O aplicaţie U definită pe X cu valori în Y se numeşte *operator liniar* dacă este aditivă ($U(x+y) = U(x) + U(y)$, $\forall x, y \in X$) şi omogenă ($U(\alpha x) = \alpha U(x)$, $\forall \alpha \in K$, $x \in X$).

Notaţie. Pentru U operator liniar din X cu valori în Y şi $x \in X$, vom scrie deseori Ux în loc de $U(x)$.

Observaţie. Dacă $U : X \longrightarrow Y$ este liniar, atunci,

$$U(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U(x_j), \ \forall \alpha_j \in K \ , \ x_j \in X, \ n \in N.$$

Este uşor de verificat că dacă U, V sunt operatori liniari definiţi pe X cu valori în Y şi $\alpha \in K$, aplicaţiile $U+V : X \longrightarrow Y$, $(U+V)(x) = U(x)+V(x)$, $\forall x \in X$ şi $\alpha U : X \longrightarrow Y$, $(\alpha U)(x) = \alpha U(x)$ sunt de asemenea operatori liniari. Atunci, notând cu $\mathcal{L}(X, Y)$ mulţimea operatorilor liniari definiţi pe X cu valori în Y, următoarea propoziţie este imediată.

Propoziţia 1.3 *Fie X, Y spaţii vectoriale peste acelaşi corp K. Mulţimea $\mathcal{L}(X,Y)$ înzestrată cu operaţiile uzuale de adunare şi de înmulţire cu sclari este spaţiu liniar peste corpul K. $\mathcal{L}(X,Y)$ se numeşte spaţiul liniar al operatorilor liniari definiţi pe X cu valori în Y.*

Observaţie. *Dacă $X = Y$ vom scrie $\mathcal{L}(X)$ pentru $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Notaţie. Fie U în $\mathcal{L}(X,Y)$. Notăm cu $\operatorname{Ker} U = \{x \in X \mid U(x) = 0\}$.

Acest subspaţiu liniar al lui X se numeşte *nucleul* operatorului U.

Propoziţia 1.4 *Fie U în $\mathcal{L}(X,Y)$. Atunci, Ker U este subspaţiu liniar al lui X. În plus, U este injectiv dacă şi numai dacă* $\operatorname{Ker} U = \{0\}$.

Demonstraţia acestui rezultat se reduce la o simplă verificare.

Observaţie. Remarcăm că dacă $U : X \longrightarrow Y$ este un operator liniar inversabil, inversul său, $U^{-1} : Y \longrightarrow X$ este de asemenea un operator liniar.

Definiţie. Spunem că două spaţii vectoriale X şi Y peste acelaşi corp K sunt *izomorfe* dacă există un operator liniar inversabil din X cu valori în Y.

Observaţii. **1)** Dacă $B = \{x_j\}_{j\in J}$ este o bază algebrică a spaţiului X şi $D = \{y_j\}_{j\in J}$ o familie de elemente din Y, atunci există un unic operator liniar $U : X \longrightarrow Y$ astfel încât $U(x_j) = y_j$, $\forall j \in J$. Într-adevăr, cum orice $x \in X$ se reprezintă în mod unic, $x = \sum_{j\in F} \alpha_j x_j$, $F \subset J$, F finită, definim $U(x) = \sum_{j\in F} \alpha_j f_j$.

În particular, dacă X şi Y sunt două spaţiii liniare finit dimensionale cu aceeaşi dimensiune, există un operator liniar inversabil din X în Y.

2) Fie X un spaţiu liniar n-dimensional, Y un spaţiu liniar m-dimensional, $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ o baza a lui X, $E = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ o bază a lui Y şi $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Modul în care lucrează operatorul T este clar dacă se cunosc valorile sale $T(x_j)$, $j = 1, 2, .., n$. Fiecare element $T(x_j)$, $j = 1, 2, .., n$ (din Y) poate fi reprezentat în mod unic $T(x_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k$. Matricea $(a_{kj})_{1\le k\le m, 1\le j\le n}$ se numeşte matricea operatorului liniar T corespunzătoare bazelor B, E. Prin urmare, odată fixate bazele B, E oricărui operator liniar i se asociază în mod unic o matice cu m linii şi n coloane cu elemente în K. Atunci,

$$T(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \alpha_j) y_k.$$

Reciproc, dacă se dă matricea $(a_{kj})_{1\le k\le m, 1\le j\le n}$, aplicaţia $T : X \to Y$, $T(x) = y$, unde dacă $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k y_k$, cu $\beta_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \alpha_j$, $k = 1, 2, .., m$, este liniară.

3) În spaţiul $K^n = \{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \mid \xi_k \in K\}$ mulţimea $\{e_k\}_{1\le k\le n}$, $e_k =$

$(\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, ..., \delta_n^{(k)})$ (unde, pentru j, $k \in N$, $\delta_j^{(k)} = 1$ dacă $j = k$ şi $\delta_j^{(k)} = 0$ în caz contrar) este în mod evident bază algebrică, numită baza standard. Dacă $T \in \mathcal{L}(K^n)$, vom identifica în mod natural, operatorul liniar T cu matricea sa în baza standard $A_T = (a_{kj})_{1 \leq k,j \leq n}$; conform observaţiei precedente, unde $B = D = \{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$, $T(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$. Atunci,

$$T(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = T(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j) = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n),$$

unde

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Definiţie. Fie X spaţiu vectorial peste K. O *funcţională* pe X este o aplicaţie definită pe X cu valori în K. O *funcţională liniară* pe X este o funcţională care este totodată şi operator liniar definit pe X cu valori în spaţiul liniar K.
Observaţie. De câte ori va fi nevoie să punem în evidenţă faptul că o funcţională este definită pe un spaţiu liniar real (respectiv complex) o vom numi funcţională reală (respectiv complexă).

1.3 Teorema Hahn-Banach de prelungire a funcţionalelor liniare

Lucrând în spaţii vectoriale înzestrate cu o topologie, în multe situaţii este nevoie să construim funcţionale liniare cu anumite proprietăţi. Pentru a realiza aceasta, se defineşte funcţionala liniară pe un subspaţiu liniar, în care proprietăţile dorite se verifică uşor, după care, se foloseşte o teoremă de prelungire care ne asigură că funcţionala se poate extinde la întreg spaţiul, cu păstrarea proprietăţilor respective. Una dintre teoremele fundamentale privind prelungirea funcţionalelor liniare este teorema Hahn-Banach. Să începem cu câteva noţiuni preliminare.

Definiţie. Fie X spaţiu vectorial peste corpul K. O aplicaţie p definită pe X cu valori reale se numeşte *funcţională subliniară* dacă este subaditivă ($p(x+y) \leq p(x)+p(y), \forall x, y \in X$) şi pozitiv omogenă ($p(tx) = tp(x)$, $\forall t \geq 0$,

$\forall x \in X$).

Definiţie. Fie X spaţiu vectorial peste corpul K. O aplicaţie subaditivă p definită pe X cu valori reale se numeşte *seminormă* dacă $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in X$.

Să notăm că noţiunea de funcţională subliniară diferă de cea de seminormă doar prin faptul că a doua condiţie are loc numai pentru scalari pozitivi, deci o seminormă este în particular o funcţională subliniară.

Observăm că dacă p este o seminormă, $p(x) \geq 0$, $\forall x \in X$ (deoarece pentru orice funcţională subliniară $p(0) = 0$, $-p(-x) \leq p(x)$, şi când p este seminormă $p(-x) = p(x)$).

Teorema 1.5 (Teorema de prelungire Hahn-Banach) *Fie X spaţiu vectorial real, p o funcţională subliniară pe X şi f o funcţională liniară definită pe un subspaţiu liniar Y al spaţiului X satisfăcând condiţia $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in Y$. Atunci, există o funcţională liniară $\widetilde{f} : X \longrightarrow R$, astfel încât $\widetilde{f}(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$ şi $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$.*

Demonstraţie. Ideea demonstraţiei este pe scurt următoarea: întâi vom arăta că pentru $x_o \in X \setminus Y$, arbitrar fixat, f poate fi prelungită la spaţiul liniar generat de x_o şi Y, $\mathrm{Sp}(Y \cup \{x_o\})$, după care, folosind Lema lui Zorn, vom dovedi că acest proces poate fi continuat pentru a extinde f la întreg spaţiul X.

Pentru y', y'' arbitrari în Y avem

$$f(y') - f(y'') = f(y' - y'') \leq p((y' + x_o) - (y'' + x_o)) \leq$$

$$\leq p(y' + x_o) + p(-(y'' + x_o)),$$

deci,

$$-f(y'') - p(-(y'' + x_o)) \leq -f(-y') + p(y' + x_o).$$

Rezultă că mulţimea $A = \{-p(-(y + x_o)) - f(y) \mid y \in Y\} \subset R$ este majorată şi că mulţimea $B = \{p(y + x_o) - f(y) \mid y \in Y\} \subset R$ este minorată. Notând cu $c' = \sup A$ şi cu $c'' = \inf B$, este clar că $c' \leq c''$. Să fixăm $c \in [c', c'']$. Atunci,

$$-p(-y - x_o) - f(y) \leq c \leq p(y + x_o) - f(y), \ \forall y \in Y.$$

Acum să definim funcţionala reală g pe $\mathrm{Sp}(Y \cup \{x\}_o)$,

$$g(y + \lambda x_o) = f(y) + \lambda c, \quad y \in Y, \ \lambda \in R.$$

Se verifică imediat că funcţionala g este liniară. Să dovedim că

$$g(y + \lambda x_o) \leq p(y + \lambda x_o), \quad y \in Y, \ \lambda \in R.$$

Dacă $\lambda = 0$, inegalitatea devine egalitatea $0 = 0$. Pentru $\lambda > 0$, după împărţire cu λ, această inegalitate devine

$$g(\frac{1}{\lambda}y + x_o) \leq p(\frac{1}{\lambda}y + x_o) \Longleftrightarrow f(\frac{1}{\lambda}y) + c \leq p(\frac{1}{\lambda}y + x_o),$$

sau echivalent,

$$c \leq p(\frac{1}{\lambda}y + x_o) - f(\frac{1}{\lambda}y).$$

Dacă $\lambda < 0$, împărţind cu $-\lambda > 0$, inegalitatea dorită este echivalentă cu

$$g(-\frac{1}{\lambda}y - x_o) \leq p(-\frac{1}{\lambda}y - x_o) \Longleftrightarrow f(-\frac{1}{\lambda}y) - c \leq p(-\frac{1}{\lambda}y - x_o),$$

adică

$$p(-\frac{1}{\lambda}y - x_o) - f(-\frac{1}{\lambda}y) \leq c.$$

Prin urmare, funcţionala g definită pe $\mathrm{Sp}(Y \cup \{x_o\})$ este o prelungire a lui f la $\mathrm{Sp}(Y \cup \{x_o\})$ astfel încât $g(z) \leq p(z)$, $\forall z \in \mathrm{Sp}(Y \cup \{x_o\})$.

Acum vom utiliza Lema lui Zorn. Fie $\mathcal{F}$ familia tuturor prelungirilor g ale lui f, $g : Z \longrightarrow R$ satisfăcând $g(z) \leq p(z)$ pe subspaţiul Z, de definiţie. Vom ordona parţial $\mathcal{F}$ prin $g_1 \prec g_2$ dacă g_2 este definită pe un subspaţiu care include domeniul lui g_1, şi $g_2(z) = g_1(z)$ acolo unde sunt ambele definite. Să arătăm că $(\mathcal{F}, \prec)$ este inductiv ordonată, deci că orice submulţime total ordonată a lui $\mathcal{F}$ este majorată. Fie $(g_\alpha)_\alpha$ o familie total ordonată în $\mathcal{F}$, $g_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow R$. Să definim $\widetilde{g} : \bigcup_\alpha Z_\alpha \longrightarrow R$ prin $\widetilde{g}(z) = g_\alpha(z)$ dacă $z \in Z_\alpha$. Aplicaţia $\widetilde{g}$ este bine definită, deoarece oricare α_1, α_2, $(g_\alpha)_\alpha$ fiind total ordonată, are loc $Z_{\alpha_1} \subset Z_{\alpha_2}$ (sau invers) şi $g_{\alpha_2}(z) = g_{\alpha_1}(z)$ pe Z_{α_1}. Este clar că $g_\alpha \prec \widetilde{g}$ deci am arătat că orice submulţime total ordonată are un majorant. Cu Lema lui Zorn concludem că $\mathcal{F}$ are un element maximal $\widetilde{f}$, definit pe un anumit subspaţiu X' al lui X pe care subspaţiu este satisfăcută inegalitatea $\widetilde{f}(x) \leq p(x)$. Dar X' trebuie să coincidă cu X, deoarece, în caz contrar, $X' \subsetneq X$, aplicând prima parte a demonstraţiei funcţionalei $\widetilde{f} : X' \longrightarrow R$ am găsi o prelungire a lui $\widetilde{f}$ la spaţiul $\mathrm{Sp}(X' \cup \{x_o'\})$, unde $x_o' \in X \setminus X'$. Aceasta contrazice maximalitatea lui $\widetilde{f}$. Rezultă că prelungirea $\widetilde{f}$ este definită pe întreg spaţiul X şi demonstraţia este încheiată.

Corolarul 1.6 *Dacă p este o funcţională subliniară pe spaţiul liniar real X, atunci, pentru orice $x_o \in X$, există o funcţională liniară pe X astfel încât $f(x_o) = p(x_o)$ şi $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.*

Demonstraţie. Să notăm cu Y subspaţiul liniar al lui X generat de $\{x_o\}$ şi să definim pe Y funcţionala liniară $f(\lambda x_o) = \lambda p(x_o)$, $\lambda \in R$. Această funcţională are proprietăţile: $f(x_o) = p(x_o)$, $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in Y$. Cea din urmă rezultă din faptul că $f(\lambda x_o) = \lambda p(x_o) = p(\lambda x_o)$, dacă $\lambda > 0$, şi, dacă $\lambda < 0$, $f(\lambda x_o) = \lambda p(x_o) \leq -\lambda p(-x_o) = p(\lambda x_o))$. Folosind teorema precedentă, funcţionala f poate fi prelungită la întreg spaţiul.

Teorema 1.7 (Teorema Hahn-Banach-cazul complex) *Fie X spaţiu vectorial complex, p o seminormă pe X şi f o funcţională liniară complexă definită pe un subspaţiu liniar Y al spaţiului X satisfăcând condiţia $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in Y$. Atunci, există o funcţională liniară complexă $\widetilde{f} : X \longrightarrow C$, astfel încât $|\widetilde{f}(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$ şi $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$.*

Demonstraţie. Funcţionala f poate fi reprezentată sub forma $f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \forall x \in Y$, unde f_1, f_2 sunt funcţionale liniare reale pe Y ($f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$ şi $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$). Deoarece

$$i(f_1(x) + if_2(x)) = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix)$$

rezultă că $f_2(x) = -f_1(ix)$, deci $f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \forall x \in Y$.

Acum, să considerăm funcţionala liniară reală f_1 pe Y. Cum

$$f_1(x) \leq |f_1(x)| \leq |f(x)| \leq p(x),$$

conform Teoremei Hahn-Banach, există o prelungire liniară reală la întreg spaţiul X a lui f_1, fie aceasta $\widetilde{f}_1$, satisfăcând $\widetilde{f}_1(x) \leq p(x)$. Punând $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_1(x) - i\widetilde{f}_1(ix), \forall x \in X$, este clar că funcţionala complexă $\widetilde{f}$ este o prelungire aditivă a lui f. Pentrur $a + bi$ număr complex arbitrar şi $x \in X$, avem

$$\begin{aligned}\widetilde{f}((a+bi)x) &= \widetilde{f}_1(ax + ibx) - i\widetilde{f}_1(aix - bx) = \\ &= a\widetilde{f}_1(x) + b\widetilde{f}_1(ix) - ai\widetilde{f}_1(ix) + bi\widetilde{f}_1(x) = \\ &= (a+bi)\widetilde{f}_1(x) - (a+bi)i\widetilde{f}_1(ix),\end{aligned}$$

ceea ce dovedeşte liniaritatea lui $\widetilde{f}$. Pentru a finaliza demonstraţia, mai trebuie să vedem că $|\widetilde{f}(x)| \leq p(x), \forall x \in X$. Notând cu $\theta = \arg \widetilde{f}(x)$ şi ţinând cont de $\operatorname{Re} \widetilde{f} = \widetilde{f}_1$, avem

$$|\widetilde{f}(x)| = \widetilde{f}(x)\ e^{-i\theta} = \widetilde{f}(e^{-i\theta}x) = \widetilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}x| \cdot p(x) = p(x)$$

Următorul corolar şi demonstraţia sa sunt similare cu analoagele lor din cazul real.

Corolarul 1.8 *Dacă p este o seminormă pe spaţiul liniar complex X, atunci, pentru orice $x_o \in X$, există o funcţională liniară pe X astfel încât $f(x_o) = p(x_o)$ şi $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.*

Capitolul 2

Spaţii Banach, spaţii Hilbert

2.1 Spaţii normate, spaţii Banach

În continuare X este spaţiu liniar peste corpul K.

Definiţie. O *normă* pe X este o funcţie $\|\cdot\| : X \longrightarrow R$ satisfacând următoarele condiţii:

(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$;
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in K, \forall x \in X$.

Definiţie. Un *spaţiu normat* este o pereche $(X, \|\cdot\|)$ unde X este spaţiu liniar şi $\|\cdot\|$ o normă pe X.

În orice spaţiu normat $(X, \|\cdot\|)$ se consideră distanţa asociată normei, $d(x,y) = \|x-y\|$. Topologia normei pe X, $\tau_{\|\cdot\|}$ este topologia metrică definită de această distanţă. Prin urmare, un şir $(x_n)_n \subset X$ este convergent la $x \in X$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există n_ε natural astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$; $(x_n)_n \subset X$ este şir Cauchy dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$ natural astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Definiţie. Dacă $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ este spaţiu metric complet (adică orice şir Cauchy este convergent), spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte *spaţiu Banach*.

Din proprietăţile (ii) şi (iii) ale normei, rezultă

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|, \ \forall x, y \in X,$$

inegalitate care arată că aplicaţia $x \rightarrow \|x\|$ (din $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ în R) este continuă. Se poate verifica imediat că aplicaţia $(x,y) \longmapsto x+y$ din $X \times X$ (dotat cu topologia produs) în X este continuă şi că pentru orice $\alpha \neq 0$, aplicaţia $x \longmapsto \alpha x$ din X în X este un homeomorfism.

Pentru $x_o \in X$ şi $r > 0$, sfera deschisă cu centrul x_o şi raza r, este $B(x_o, r) = \{x \in X \mid \|x - x_o\| < r\}$. Închiderea sa (în $\tau_{\|\cdot\|}$), $\overline{B}(x_o, r)$ coincide cu $\{x \in X \mid \|x - x_o\| \leq r\}$, fapt care se verifică fără dificultate. Pentru $x_o = 0$, în loc de $B(0, r)$ vom scrie uneori $B(r)$; este clar că $B(x_o, r) = B(r) + \{x_o\}$. Să mai reţinem că pentru orice punct x_o, familia de sfere $\{B(x_o, r)\}_{r>0}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale punctului x_o.

O submulţime A a spaţiului X se numeşte mărginită dacă există $\alpha > 0$ astfel încât $\|x\| \leq \alpha$, $\forall x \in A$. Este bine să observăm ca închiderea oricărei mulţimi mărginite este tot o mulţime mărginită.

Definiţie. Spunem că două norme $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ pe spaţiul liniar X sunt *echivalente* (şi scriem $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$) dacă există constantele $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$ astfel încât

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \ \forall x \in X.$$

Propoziţia 2.1 *Fie $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ două norme pe spaţiul liniar X. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1) Normele $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ sunt echivalente;
2) Topologiile $\tau_{\|\cdot\|_1}$ şi $\tau_{\|\cdot\|_2}$ coincid.

Demonstraţia acestei propoziţii este imediată..

Definiţie. Două spaţii normate X, Y peste acelaşi corp K se numesc *izometrice* dacă există o aplicaţie liniară bijectivă $U : X \longrightarrow Y$ care conservă norma, adică $\|U(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in X$.

Observaţie. O aplicaţie liniară din X în Y astfel încât $\|U(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in X$ va fi numită în cele ce urmează *izometrie (liniară)* pe X.

Definiţie. Fie $(x_n)_n$ un şir în spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$. Perechea $((x_n)_n, (s_n)_n)$, unde $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, se numeşte seria de termen general x_n. Seria de termen general x_n va fi notată prin $\sum_{n\geq 1} x_n$.
Seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ se numeşte *convergentă* dacă şirul $(s_n)_n$ este convergent; limita acestui şir se numeşte *suma* seriei şi se notează cu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.
Spunem ca seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|$ este convergentă.
Seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ se numeşte *necondiţionat convergentă* dacă pentru orice permutare σ a mulţimii numerelor naturale N, seria $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ este convergentă.

Este important să avem criterii cu care să putem stabili dacă un spaţiu normat este complet. Un astfel de criteriu este următorul rezultat.

Propozitia 2.2 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu normat. Atunci, $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach dacă şi numai dacă orice serie absolut convergentă în X este convergentă.*

Demonstraţie. Să presupunem mai întâi că X este complet. Fie $\sum_{n\geq 1} x_n$ o serie absolut convergentă în X, deci pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ astfel încât $\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon$. Atunci, pentru n, m arbitrari cu $n \geq m \geq n_\varepsilon$ avem

$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\| = \|\sum_{k=m}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$ este Cauchy, şi, prin urmare, X fiid Banach, convergent.

Reciproc, dacă $(x_n)_n$ este un şir Cauchy în X, există $(x_{k_n})_n$ un subşir al său astfel încât

$$\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \forall n \in N,$$

prin urmare seria $\sum_{n\geq 1} \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\|$ este convergentă. Folosind ipoteza, deducem că şi seria $\sum_{n\geq 1}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n})$ este convergentă, deci şirul $(x_{k_1} + \sum_{n=1}^{m-1}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}))_m$ este convergent. Cum pentru orice număr natural $m \geq 2$,

$$x_{k_1} + \sum_{n=1}^{m-1}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) = x_{k_m}$$

constatăm că subşirul $(x_{k_n})_n$ al şirului $(x_n)_n$ este convergent. Ţinând cont că orice şir Cauchy care conţine un subşir convergent este convergent, demonstraţia este încheiată.

În continuare arătăm că produsul cartezian al unei familii finite de spaţii normate poate fi echipat în mod natural cu o structură de spaţiu normat.

Teorema 2.3 *Fie $(X_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2, ..., n$ spaţii normate. Atunci,*

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \max_{j=1,2,...,n} \|x_j\|_j$$

este o normă pe $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$, şi topologia $\tau_{\|\cdot\|}$ coincide cu topologia produs pe X.

În plus, dacă fiecare $(X_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2, ..., n$ este spaţiu Banach, spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$ este de asemenea Banach.

Demonstraţie. Este uşor de văzut că aplicaţia

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \max_{j=1,2,...,n} \|x_j\|_j$$

este o normă pe $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$. Observăm că dacă $B(\varepsilon)$, $B_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, ..., n$ sunt sferele de rază ε în X, respectiv X_j, avem că $B(\varepsilon) = \prod_{j=1}^{n} B_j(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$. Este clar că topologia $\tau_{\|\cdot\|}$ coincide cu topologia produs.

Considerând $((x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)}))_m$ un şir Cauchy în X, din inegalitatea

$$\|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}\|_j \leq \max_{j=1,2,...,m} \|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}\|_j, \ \forall k, l \in N$$

rezultă că pentru fiecare $j = 1, 2, ..., n$, şirul $(x_j^{(m)})_m \subset X_j$ este Cauchy. Cum $(X_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2, ..., n$ este Banach, există $x_j \in X_j$, limita şirului $(x_j^{(m)})_m$, de unde, concludem imediat că

$$\|(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)}) - (x_1, x_2, ..., x_n)\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.2 Exemple de spaţii Banach

În această secţiune vom da câteva exemple importante de spaţii Banach.

1. Spaţii normate finit dimensionale. Spaţiul K^n poate fi normat în mai multe moduri. De un interes deosebit sunt aşa numitele p-norme, unde $p \in [1, \infty)$. Să definim pe K^n aplicaţia reală

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \longmapsto \|(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\|_p \text{ unde } \|(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Pentru a arăta că această aplicaţie este o normă, facem mai întâi următoarele observaţii:

(1) Fie p, $q > 1$ astfel încât $1/p + 1/q = 1$. Atunci,

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \quad \forall a, b \in K.$$

Este clar că este suficient să demonstrăm această inegalitate numai în cazul în care $a > 0$, $b > 0$ (ea fiind verificată în mod banal dacă unul dintre numere este zero). Să considerăm aplicaţia reală pe $(0, \infty)$, $f(x) = x^p/p - x$ şi să observăm că aceasta are valoarea minimă $-1/q$ când $x = 1$, deci

$$\frac{x^p}{p} - x \geq \frac{-1}{q}, \quad \forall x > 0$$

sau, echivalent,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \geq x, \quad \forall x > 0.$$

Dacă în relaţia de mai sus punem $x = ab^{1-q}$ şi apoi înmulţim cu b^q, inegalitatea propusă este demonstrată.

(2) (Inegalitatea lui Hölder) Fie p, $q > 1$ astfel încât $1/p + 1/q = 1$ şi ξ_i, η_i $(i = 1, 2, ..., n)$ în K. Atunci,

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Să presupunem mai întâi că $(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} \neq 0$ şi $(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}} \neq 0$. Atunci, dacă în observaţia precedentă ((1)), punem

$$a = \frac{|\xi_i|}{(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|\eta_i|}{(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$$

obţinem

$$\frac{|\xi_i| \cdot |y_i|}{(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|\xi_i|^p}{p\,(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)} + \frac{|\eta_i|^q}{q\,(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q)}, \; i = 1, 2, ..., n$$

şi sumând, rezultă inegalitatea dorită,

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot |\eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dacă $(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$ sau $(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}} = 0$, totul este clar, inegalitatea devenind $0 \leq 0$.

(3) (Inegalitatea lui Minkowski) Fie $p \in [1, \infty)$ şi ξ_i, η_i $(i = 1, 2, ..., n)$ în K. Atunci,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Inegalitatea este evidentă dacă $p = 1$ sau $\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p = 0$ sau $\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p = 0$. Este suficient să o demonstrăm pentru ξ_i, $\eta_i \geq 0$ şi cel puţin unul dintre numerele ξ_i, respectiv η_i nenul. Cu inegalitatea lui Hölder avem

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^p=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^{p-1}\xi_i+\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^p\eta_i\leq$$

$$\leq\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^p\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Prin urmare, împărţind la $(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^p)^{\frac{p-1}{p}}$, demonstraţia este încheiată.

Să ne întoarcem acum la spaţiul K^n şi la aplicaţia

$$(\xi_1,\xi_2,....,\xi_n)\longmapsto\|(\xi_1,\xi_2,....,\xi_n)\|_p.$$

Primele două proprietăţi ale normei se verifică imediat. Folosind inegalitatea lui Minkowski rezultă şi că

$$\|(\xi_1,\xi_2,....,\xi_n)+(\eta_1,\eta_2,....,\eta_n)\|_p\leq\|(\xi_1,\xi_2,....,\xi_n)\|_p+\|(\eta_1,\eta_2,....,\eta_n)\|_p.$$

Mai mult $(K^n,\|\cdot\|_p)$ este spaţiu Banach. Pentru a verifica aceasta, să luăm un şir Cauchy arbitrar $(x_l)_l$ în K^n, $x_l=(\xi_1^{(l)},\xi_2^{(l)},...,\xi_n^{(l)})$ şi să dovedim că este convergent. Pentru orice număr natural fixat k, avem

$$|\xi_k^{(l)}-\xi_k^{(m)}|\leq\|x_l-x_m\|_p\longrightarrow 0 \text{ când } l,m\to\infty$$

deci, $(\xi_k^{(l)})_l$ este şir Cauchy în K. Deoarece K este complet, concluzionăm că pentru fiecare k există ξ_k în K, $\xi_k=\lim_l\xi_k^{(l)}$. Notând $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in K^n$ cum

$$\|x_l-x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(l)}-\xi_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

rezultă că $\|x_l-x\|_p\longrightarrow 0$ pentru $l\to\infty$.

Ţinând cont că orice spaţiu liniar finit dimensional X este izomorf cu K^n (izomorfismul fiind în mod natural $x\longmapsto(\xi_1,\xi_2,....,\xi_n)$, unde $(\xi_1,\xi_2,....,\xi_n)\in K^n$ reprezintă coordonatele elementului x ($x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$) într-o bază fixată

$(e_1, e_2, ..., e_n)$ a spaţiului liniar n-dimensional X) concludem că $(X, \|\cdot\|_p)$, $\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, este spaţiu Banach.

2. Spaţii de şiruri numerice mărginite. Notăm cu l_K^∞ mulţimea şirurilor numerice mărginite $x = (\xi_n)_{n\in N} \subset K$. Cu suma şi înmulţirea cu scalari uzuale (pe componente), l_K^∞ este spaţiu liniar peste corpul K. Se verifică imediat că aplicaţia $x \longmapsto \|x\|$,

$$\|x\| = \sup_{n\in N} |\xi_n|$$

este o normă pe l_K^∞. Considerăm următoarele subspaţii liniare ale spaţiului l_K^∞: c_K, conţinand toate şirurile convergente, c_K^o, al tuturor şirurilor covergând la zero (care este la rândul său un subspaţiu liniar al spaţiului c_K) şi s_{oo} al şirurilor care au toţi termenii nuli, exceptând un numar finit dintre ei (care, clar, este un subspaţiu liniar al spaţiilor c_K^o şi c_K). Vom arăta că $(l_K^\infty, \|\cdot\|)$, $(c_K, \|\cdot\|)$, $(c_K^o, \|\cdot\|)$ sunt toate spaţii Banach (prin urmare, c_K este subspaţiu liniar închis al spaţiului l_K^∞ iar c_K^o este subspaţiu liniar închis al spaţiului c_K). Spaţiul $(s_{oo}, \|\cdot\|)$ nu este Banach; el este un subspaţiu liniar dens al spaţiului c_K^o, $\overline{s_{oo}} = c_K^o$.

Să demonstrăm mai întâi ca $(l_K^\infty, \|\cdot\|)$ este Banach. Fie $(x_n)_n$ un şir Cauchy în $(l_K^\infty, \|\cdot\|)$, $x_n = (\xi_k^{(n)})_{k\geq 1}$. Fixând $k \in N$, deorece $|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \leq \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ când n, $m \to \infty$, rezultă că $(\xi_k^{(n)})_{n\geq 1}$ este şir Cauchy în K. Cum K este complet, pentru fiecare $k \in N$, există (unic) $\xi_k \in K$, $\xi_k = \lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)}$. Să notăm cu x şirul $(\xi_k)_k$ şi să arătăm că $x \in l_K^\infty$, şi apoi că el este limita în $(l_K^\infty, \|\cdot\|)$ a şirului $(x_n)_n$. Deoarece orice şir Cauchy este mărginit, există $\alpha > 0$ astfel încât $\|x_n\|_\infty < \alpha$, $\forall n \in N$. Deci,

$$|\xi_k^{(n)}| \leq \alpha, \ \forall n \in N, \ \ \forall k \in N$$

de unde,

$$|\xi_k| = \lim_n |\xi_k^{(n)}| \leq \alpha, \ \forall k \in N$$

adică $x \in l_K^\infty$. A mai rămas de verificat că $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, când $n \to \infty$. Să fixăm $\varepsilon > 0$, şi un număr natural n_ε astfel ca pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$ să avem $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$. Atunci,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall k \in N.$$

Fixând k arbitrar şi de asemenea $n \geq n(\varepsilon)$, în inegalitatea precedentă, pentru $m \to \infty$, obţinem

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall k \in N, \ \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Prin urmare,

$$\|x_n - x\| = \sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Pentru a dovedi că $(c_K, \|\cdot\|)$ (respectiv $(c_K^o, \|\cdot\|)$) este spaţiu Banach, vom arata că c_K, (respectiv c_K^o) este subspaţiu liniar închis al spaţiului $(l_K^\infty, \|\cdot\|)$. Să pornim deci cu $x = (\xi_k)_k \in \bar{c}_K$ şi să demonstrăm că x este şir Cauchy în K, deci convergent. Fie $(x_n)_n \subset c_K$, unde $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $n(\varepsilon) \in N$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall k \in N$

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cum $x_{n(\varepsilon)}$ este şir Cauchy, există $k(\varepsilon) \in N$ astfel încât $|\xi_k^{(n(\varepsilon))} - \xi_l^{(n(\varepsilon))}| < \varepsilon/3$, $\forall k,\ l \geq k(\varepsilon)$. Atunci, pentru $k,\ l \geq k(\varepsilon)$ avem

$$|\xi_k - \xi_l| \leq |\xi_k - \xi_k^{(n(\varepsilon))}| + |\xi_k^{(n(\varepsilon))} - \xi_l^{(n(\varepsilon))}| + |\xi_l^{(n(\varepsilon))} - \xi_l| < \varepsilon.$$

Similar, se arată că $\overline{c_K^o} = c_K^o$. Într-adevar, dacă $x = (\xi_k)_k \in \overline{c_K^o}$, fie $(x_n)_n \subset c_K^o$, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, există $n(\varepsilon) \in N$ astfel încât $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall k \in N$

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deoarece $x_{n(\varepsilon)}$ este convergent la zero, $\exists\ k(\varepsilon) \in N$ astfel încât $\forall k \geq k(\varepsilon)$, $|\xi_k^{(n(\varepsilon))}| < \varepsilon/2$. Atunci, $\forall\ k \geq k(\varepsilon)$

$$|\xi_k| \leq |\xi_k - \xi_k^{(n(\varepsilon))}| + |\xi_k^{(n(\varepsilon))}| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că şirul $x = (\xi_k)_k$ converge la zero.

În continuare, găsim un şir Cauchy în s_{oo} care nu este convergent în s_{oo}. Să considerăm şirul $x_n = (\xi_k^{(n)})_k$ unde

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 1/2^k & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}.$$

Notăm că pentru $m > n$, arbitrari, avem

$$x_m - x_n = (0, 0, ..., 0, 1/2^{n+1}, ..., 1/2^m, 0...), \text{ deci } \|x_m - x_n\| = 1/2^{n+1},$$

aşadar $(x_n)_n$ este şir Cauchy în s_{oo}. Să presupunem că ar exista $x \in s_{oo}$, astfel ca $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, pentru $n \to \infty$. Dacă $x = (\xi_1, ..., \xi_k, 0, 0, ...)$, când $n > k$,

$$x_n - x = (\frac{1}{2} - \xi_1, \frac{1}{2^2} - \xi_2, ..., \frac{1}{2^k} - \xi_k, \frac{1}{2^{k+1}}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, ...),$$

adică $\|x_n - x\| \geq 1/2^{k+1}$, de unde, pentru $n \to \infty$, avem că $\lim_n \|x_n - x\| \geq 1/2^{k+1}$ (ceea ce contrazice faptul că $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, pentru $n \to \infty$).

Mai avem de arătat că $\overline{s}_{oo} = c^o_K$. Fie x în c^o_K, $x = (\xi_k)_k$. Este suficient să demonstrăm că pentru $\forall \varepsilon > 0$, există $\widetilde{x} \in s_{oo}$, cu $\|x - \widetilde{x}\| < \varepsilon$. Deoarece $\lim_k \xi_k = 0$, găsim $k(\varepsilon)$ astfel încât $\forall k \geq k(\varepsilon)$, $|\xi_k| < \varepsilon/2$. Luând $\widetilde{x} = (\xi_1, ..., \xi_{k(\varepsilon)}, 0, ...)$ (şir care aparţine spaţiului s_{oo}), avem că

$$\|x - \widetilde{x}\| = \|(0, ..., 0, \xi_{k(\varepsilon)+1}, ..., \xi_k ...)\| = \sup_{k \geq k(\varepsilon)+1} |\xi_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

3. Spaţiile $\mathbf{l}^p_K$. Pentru $p \in [1, \infty)$, considerăm mulţimea $l^p_K = \{(\xi_n)_{n\geq 1} \subset K | \sum_{n\geq 1} |\xi_n|^p$ este convergentă$\}$; elementele sale se numesc şiruri p-absolut sumabile. Cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu sclari, l^p_K este un spaţiu liniar (faptul că suma a două şiruri din l^p_K este tot în l^p_K rezultă cu inegalitatea lui Minkowski). Aplicaţia

$$(\xi_n)_{n\geq 1} \longmapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

este o normă pe l^p_K, notată în continuare cu $\|\cdot\|_p$. Primele doua proprietăţi ale normei se verifică imediat, iar $\|(\xi_n)_{n\geq 1} + (\eta_n)_{n\geq 1}\|_p \leq \|(\xi_n)_{n\geq 1}\|_p + \|(\eta_n)_{n\geq 1}\|_p$ rezultă cu inegalitatea lui Minkowski.

Mai mult, $(l^p_K, \|\cdot\|_p)$ este spaţiu Banach. Într-adevăr, să considerăm $(x_n)_n$ un şir Cachy arbitrar în l^p_K, $x_n = (\xi^{(n)}_k)_k$. Pentru orice număr natural fixat k,

$$|\xi^{(n)}_k - \xi^{(n)}_k| \leq \|x_n - x_m\|_p \longrightarrow 0 \text{ pentru } n, m \to \infty,$$

deci $(\xi^{(n)}_k)_n$ este şir Cauchy în K. Deoarece K este complet, pentru fiecare k, există $\lim_n \xi^{(n)}_k = \xi_k$. Observăm mai întâi că şirul numeric $x = (\xi_k)_k \in l^p_K$.

Într-adevar, cum $(x_n)_n$ este şir Cauchy, el este mărginit, prin urmare $\exists\alpha > 0$, astfel încât

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k^{(n)}|^p \leq \alpha^p, \quad \forall n, m \in N.$$

Fixând $m \in N$, pentru $n \to \infty$, avem că $\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \leq \alpha^p$, ceea ce dovedeşte că $x \in l_K^p$.

Dacă mai arătăm că $\|x_n - x\|_p \longrightarrow 0$, $n \to \infty$, putem concluziona că $(l_K^p, \| \cdot \|_p)$ este spaţiu Banach. Fie deci $\varepsilon > 0$. Cum $(x_n)_n$ este şir Cauchy, $\exists n_\varepsilon$ astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon/2$. Atunci, pentru fiecare număr natural l, avem

$$\sum_{k=1}^{l} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

şi, pentru $m \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{l} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Din această inegalitate, pentru $l \to \infty$, rezultă

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

şi deci $\|x_n - x\|_p < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

4. **Spaţii de funcţii mărginite**. Dacă T este o mulţime nevidă, să notăm cu $\mathcal{B}_K(T) = \{ x : T \to K \mid x$ funcţie mărginită$\}$. Cu operaţiile uzuale de sumare şi înmulţire cu scalari ale funcţiilor numerice $\mathcal{B}_K(T)$ este spaţiu liniar. Se verifică imediat că aplicaţia $x \longmapsto \|x\|_\infty$, unde

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

este o normă pe $\mathcal{B}_K(T)$. Să arătăm că $(\mathcal{B}_K(T), \| \cdot \|_\infty)$ este spaţiu Banach. Fie $(x_n)_n$ un şir Cauchy. Atunci, pentru orice $t \in [a, b]$, fixat, avem $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty \longrightarrow 0$, pentru $n, m \to \infty$, deci $(x_n(t))_n$ este şir Cauchy în K. Din nou, din completitudinea lui K rezultă că există (unic) un număr, $x(t)$ cu $x_n(t) \longrightarrow x(t)$. Arătăm că functţa $x : T \longmapsto K$, definită prin $x(t) = \lim_n x_n(t)$ se află în $\mathcal{B}_K(T)$. Deoarece şirul $(x_n)_n$ este Cauchy, el este mărginit, deci există $\alpha > 0$ astfel încât $\|x_n\|_\infty < \alpha$, $\forall n \in N$. Atunci,

$$|x(t)| = \lim_n |x_n(t)| \leq \alpha, \quad \forall t \in T,$$

adică funcţia x este mărginită.

Să mai verificăm că pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon$, adică $(x_n)_n$ converge la x în $(\mathcal{B}_K(T), \|\cdot\|_\infty)$. Fie $\varepsilon > 0$ şi n_ε astfel încât pentru $n, m \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon/3$. Atunci,

$$\|x - x_{n_\varepsilon}\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \lim_{n \to \infty} |x_n(t) - x_{n_\varepsilon}(t)| \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [a,b]} \sup_{n \geq n_\varepsilon} |x_n(t) - x_{n_\varepsilon}(t)| = \sup_{n \geq n_\varepsilon} \|x_n - x_{n_\varepsilon}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

şi prin urmare, $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$$\|x - x_n\|_\infty \leq \|x - x_{n_\varepsilon}\|_\infty + \|x_n - x_{n_\varepsilon}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Remarcăm că $(\mathcal{B}_K(N), \|\cdot\|_\infty) = (l_K^\infty, \|\cdot\|)$ (Exemplul 2).

5. Spaţii de funcţii continue. Fie $\mathcal{C}_K[a, b]$ spaţiul liniar al funcţiilor continue pe intervalul $[a, b]$ (cu valori în K), echipat cu norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Demonstrăm că $(\mathcal{C}_K[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach. Ţinând cont de faptul că $\mathcal{C}_K[a, b]$ este subspaţiu liniar al spaţiului Banach $(\mathcal{B}_K[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ este suficient să verificăm că $\mathcal{C}_K[a, b]$ este închis în $(\mathcal{B}_K[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Fie deci $(x_n)_n$ un şir din $\mathcal{C}_K[a, b]$ convergent în $(\mathcal{B}_K[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ la x. Dacă arătăm că funcţia x este continuă pe $[a, b]$, demonstraţia este încheiată. Să fixăm deci $t \in [a, b]$. Trebuie să dovedim că pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ astfel încât dacă $|s - t| < \delta$, $|x(s) - x(t)| < \varepsilon$. Să luăm n_ε cu $\|x_{n_\varepsilon} - x\|_\infty < \varepsilon/3$. Cum funcţia x_{n_ε} este continuă în t, există $\delta > 0$ astfel încât dacă $|s - t| < \delta$, $|x_{n_\varepsilon}(s) - x_{n_\varepsilon}(t)| < \varepsilon/3$. Atunci, pentru $|s - t| < \delta$ avem

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x_{n_\varepsilon}(s)| + |x_{n_\varepsilon}(s) - x_{n_\varepsilon}(t)| + |x_{n_\varepsilon}(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

ceea ce dovedeşte că funcţia x este continuă în t. Norma pe $\mathcal{C}_K[a, b]$, va fi notată în mod uzual cu $\|\cdot\|$ în loc de $\|\cdot\|_\infty$.

6. Spaţiile $\mathbf{L}_K^p(\mathbf{T})$. Fie $T = [a, b]$, un interval de numere reale şi $p \in [1, \infty)$. Spaţiul $L_K^p(T)$ este definit ca spaţiul liniar al tuturor claselor de echivalenţă al funcţiilor numerice definite pe T măsurabile Lebesgue cu proprietatea că $|x|^p$ este integrabilă. Doua funcţii sunt echivalente dacă sunt egale a.p.t. (clasa de echivalenţă a elementului x se notează cu acelaşi simbol, x). Aplicaţia definită prin

$$\|x\|_p = \left(\int |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

este o normă pe $L^p_K(T)$ şi $(L^p_K(T), \|\cdot\|_p)$ este spaţiu Banach. Pentru demonstraţia acestui rezultat se poate consulta de exemplu [5].

2.3 Spaţii normate finit dimensionale

2.3.1 Echivalenţa normelor

Următorul rezultat arată că toate normele pe un spaţiu liniar finit dimensional sunt echivalente şi, ca urmare, toate topologiile de spaţiu liniar normat coincid.

Teorema 2.4 *Fie X un spaţiu vectorial peste corpul K având dimensiune finită, $\dim_K X = n < \infty$ şi $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază algebrică a spaţiului X. Atunci:*

1) Aplicaţia reală pe X, $x \longmapsto \|x\|_2$, unde, pentru $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

este o normă pe X.

2) Orice altă normă pe X este echivalentă cu $\|\cdot\|_2$.

Demonstraţie. 1) Acest fapt rezultă imediat cu inegalitatea lui Minkowski (2.2, Exemplul 1, (3)).

2) Să considerăm $\|\cdot\|$, o altă normă pe X. Atunci, pentru orice $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, folosind proprietăţile normei şi inegalitatea lui Hölder, obţinem

$$\|x\| = \|\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\| \le \sum_{j=1}^n |\xi_j| \cdot \|e_j\| \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2.$$

Prin urmare mai avem de arătat că există $\beta > 0$ astfel încât $\|x\|_2 \leq \beta\|x\|$, $\forall x \in X$. Să presupunem prin absurd că aceasta nu se întâmplă, deci că $\forall \beta > 0$, $\exists x_\beta \in X$, cu $\|x_\beta\|_2 > \beta\|x_\beta\|$; în particular, pentru orice număr natural m, $\exists x_m \in X$, cu $\|x_m\|_2 > m\|x_m\|$. Să considerăm şirul $(y_m)_{m\geq 1}$, unde

$$y_m = \frac{1}{\|x_m\|_2}\, x_m.$$

Reţinem că $\|y_m\|_2 = 1$ şi că $\|y_m\| < 1/m$, $\forall m \in N$. Cum $y_m \in X$, $y_m = = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(m)} e_j$, $\forall m \in N$. Fixând j arbitrar, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, din

$$|\eta_j^{(m)}| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|y_m\|_2 = 1,\ \forall m \in N,$$

obţinem că şirul numeric $(\eta_j^{(m)})_{m\geq 1}$ este mărginit, deci conţine un subşir convergent. Procedând prin diagonalizare, găsim pentru $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ un subşir convergent al şirului $(\eta_j^{(m)})_{m\geq 1}$, notat, pentru simplificarea scrierii cu $(\gamma_j^{(m)})_m$, $\gamma_j^{(m)} \xrightarrow{m} \gamma_j$. Să definim în K^n şirul $(z_m)_{m\geq 1}$,

$$z_m = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} e_j,$$

şi elementul

$$z = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j.$$

Deoarece $(z_m)_{m\geq 1}$ este un subşir al şirului $(y_m)_{m\geq 1}$ (am procedat prin diagonalizare pentru extragerea subşirurilor $(\gamma_j^{(m)})_m$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$), avem

$$1 = \lim_m \|z_m\|_2 = \lim_m \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \lim_m |\gamma_j^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|z\|_2,$$

deci, reţinem $\|z\|_2 = 1$. Pe de altă parte, $\forall\ m \in N$,

$$\|z\| \leq \|z - z_m\| + \|z_m\| = \|\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j - \gamma_j^{(m)}) e_j\| + \|z_m\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j - \gamma_j^{(m)}| \cdot \|e_j\| + \|z_m\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j - \gamma_j^{(m)}| \|e_j\| + \frac{1}{m}.$$

Când $m \to \infty$, obţinem $\|z\| = 0$, deci $z = 0$, ceea ce contrazice faptul că $\|z\|_2 = 1$.

Prin urmare există $\beta > 0$ astfel încât $\|x\|_2 \leq \beta \|x\|$, $\forall x \in X$, ceea ce ne permite să concludem că orice normă pe X este echivalentă cu norma $\| \cdot \|_2$.

Corolarul 2.5 *Orice spaţiu normat finit dimensional,* $(X, \| \cdot \|)$ *este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Să alegem $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază algebrică a spaţiului liniar X. Norma $\| \cdot \|$ fiind echivalentă cu $\| \cdot \|_2$, este suficient să arătăm că spaţiul X cu metrica definită de norma euclidiană, $\| \cdot \|_2$, este complet. Dacă $(x_m)_m$, $x_m = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j$, este un şir Cauchy arbitrar, pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n\}$, şirul $(\xi_j^{(m)})_m$ este Cauchy în K, aşa cum rezultă din inegalitatea

$$|\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(m)}| \leq \|x_k - x_m\|_2$$

Cum $(K, |\cdot|)$ este complet, există $\xi_j \in K$, $\xi_j = \lim_m \xi_j^{(m)}$. Arătăm că $x_m \xrightarrow{m} x$, unde $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Deoarece $(x_m)_m$ este şir Cauchy, pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_\varepsilon \in N$, astfel încât $\forall k, m \geq m_\varepsilon$, $\|x_k - x_m\|_2 = (\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(m)}|^2)^{1/2} < \varepsilon/2$. Fixând m arbitrar, $m \geq m_\varepsilon$ şi trecând la limită în inegalitatea de mai sus pentru $k \to \infty$, obţinem

$$(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^2)^{1/2} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon, \quad \forall m \geq m_\varepsilon,$$

adică $\|x_m - x\|_2 < \varepsilon$, $\forall m \geq m_\varepsilon$. Am arătat deci că şirul Cauchy $(x_m)_m$ este convergent.

Corolarul 2.6 *Orice subspaţiu liniar finit dimensional* Y *al unui spaţiu normat* $(X, \| \cdot \|)$ *este închis.*

Demonstraţie. Din corolarul precedent, spaţiul normat $(Y, \| \cdot \|)$ este Banach. Dacă y se afla în închiderea mulţimii Y, există un şir de elemente din Y, $(y_n)_n$, care converge la y. Şirul $(y_n)_n$ este Cauchy în spaţiul complet Y, deci, există $z \in Y$, $z = \lim_n y_n$. Din unicitatea limitei (în spaţii Hausdorff) rezultă că $z = y \in Y$.

2.3.2 Mulţimi compacte în spaţii normate finit dimensionale

În acest paragraf vom arăta că familia mulţimilor compacte în spaţii normate finit dimensionale coincide cu cea a mulţimilor închise şi mărginite.

Lema 2.7 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat şi* Y *un subspaţiu liniar propriu închis al spaţiului* X $(Y \subsetneq X)$. *Atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un element* x_ε *în* $X \setminus Y$ *astfel încât* $\|x_\varepsilon\| = 1$ *şi* $\|x_\varepsilon - y\| > 1 - \varepsilon$, $\forall y \in Y$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < 1)$. Cum $Y \subsetneq X$, există $x \in X \setminus Y$. Să notăm cu d distanţa dintre elementul x şi mulţimea Y. Y fiind mulţime închisă, d este strict pozitivă, $d = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\| > 0$. Din $d < d(1+\varepsilon)$, rezultă că există un element $y_\varepsilon \in Y$ astfel încât $d \leq \|x - y_\varepsilon\| < d(1+\varepsilon)$. Definind x_ε prin

$$x_\varepsilon = \frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|} \cdot (x - y_\varepsilon)$$

observăm că $x_\varepsilon \notin X \setminus Y$ (deoarece dacă x_ε ar fi în $X \setminus Y$, ar rezulta că $x = x_\varepsilon \, \|x - y_\varepsilon\| + y_\varepsilon \in Y$, ceea ce contrazice alegerea elementului $x \in X \setminus Y$). Este clar că $\|x_\varepsilon\| = 1$, şi, pentru $y \in Y$ arbitrar, avem

$$\|x_\varepsilon - y\| = \|\frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|} \cdot (x - y_\varepsilon) - y\| = \frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|} \cdot \|x - (y_\varepsilon + y\|x - y_\varepsilon\|)\| >$$

$$> \frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|} \cdot d > \frac{1}{d(1+\varepsilon)} \cdot d = \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$$

Teorema 2.8 (Teorema lui Riesz) *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *spaţiu normat peste corpul* K. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) X *este finit dimensional;*

2) Orice submuţime închisă şi mărginită a lui X *este compactă.*

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) Să presupunem că dimensiunea spaţiului liniar X este n şi să considerăm $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază arbitrară a sa. Fie A o submulţime mărginită şi închisă a lui X şi $(x_m)_m$ un şir de elemente din A. Deoarece $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$, rezultă că există $\alpha > 0$ astfel încât $\|x_m\|_2 \leq \alpha$, $\forall m \in N$. Fiecare $x_m = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(m)} e_i$, şi, din

$$|\xi_i^{(m)}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i^{(m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x_m\|_2 \leq \alpha, \ \forall m \in N$$

rezultă că şirul $(\xi_i^{(m)})_m$ este mărginit, $\forall i = 1, 2, ..., n$, deci conţine un subşir convergent ($i = 1, 2, ..., n$). Atunci, procedând prin diagonalizare, obţinem un subşir $(z_m)_m$ al şirului $(x_m)_m$, $z_m = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(m)} e_i$ şi $\gamma_i^{(m)} \longrightarrow \gamma_i$, când $m \to \infty$, $i = 1, 2, ..., n$. Punând $z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$, avem că $z_m \longrightarrow z$, pentru $m \to \infty$. Într-adevăr,

$$\|z_m - z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i^{(m)} - \gamma_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \text{ când } m \to \infty.$$

Mai mult, A fiind închisă, $z \in A$. Am arătat că orice şir de elemente din A conţine un subşir convergent la un element din A, ceea ce dovedeşte că A este mulţime compactă.

2) $\Rightarrow$ 1) Să presupunem prin absurd că X nu este spaţiu liniar finit dimensional. Fie $x_1 \in X$, x_1 arbitrar nenul şi Y_1 subspaţiul liniar generat de x_1. Subspaţiul Y_1 fiind finit dimensional, cu Corolarul 2.6 rezultă că Y_1 este închis în X. Deoarece X nu este finit dimensional, $Y_1 \subsetneq X$. Atunci, din lema precedentă, $\exists x_2 \notin Y_1$, $\|x_2\| = 1$, $\|x_2 - y\| > 1/2$, $\forall y \in Y_1$; în particular, $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Mai departe, fie Y_2 subspaţiul liniar generat de $\{x_1, x_2\}$. Argumentând că mai sus, $\exists x_3 \notin Y_2$, $\|x_3\| = 1$, $\|x_3 - y\| > 1/2$, $\forall y \in Y_2$; în particular, $\|x_3 - x_i\| > 1/2$, $i = 1, 2$. Procedând inductiv, obţinem un şir $(x_m)_m$ în X astfel încât $\|x_m\| = 1$ şi $\|x_m - x_k\| > 1/2$, $\forall m$, $k \in N$. Deci, bila unitate închisă $\overline{B}(1)$, conţine un şir, anume $(x_m)_m$, care nu are subşiruri convergente, adică nu este mulţime compactă, deşi este închisă şi mărginită, ceea ce contrazice 2).

Corolarul 2.9 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat peste corpul K astfel încât bila unitate închisă a spaţiului X este compactă. Atunci X este spaţiu liniar finit dimensional.*

Demonstraţie. Cu teorema lui Riesz este suficient să arătăm că dacă A este o mulţime mărginită şi închisă, atunci ea este compactă. Să considerăm $A \subset X$ o mulţime mărginită şi închisă. Atunci, $\exists \alpha > 0$ astfel încât $\|x\| \leq \alpha$, $\forall x \in A$, ceea ce implică $1/\alpha\ A \subset \overline{B}(1)$. Totodată $1/\alpha\ A$ este mulţime închisă, deci fiind submulţime a mulţimii compacte $\overline{B}(1)$, este ea însăşi compactă. Cum aplicaţia $x \longmapsto 1/\alpha \cdot x$ este un homeomorfism pe X, putem concluziona că şi A este compactă.

Încheiem această secţiune cu o aplicaţie, un rezultat de aproximare în spaţii liniare normate.

Propoziţia 2.10 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat peste corpul K şi Y un subspaţiu liniar finit dimensional al spaţiului X. Atunci, pentru orice*

$x \in X$, *există un element* $y_x \in Y$ *astfel încât*

$$d(x,Y) = \|x - y_x\|,$$

(y_x *se numeşte element de cea mai bună aproximare a elementului* x *în* Y*).*
Demonstraţie. Să notăm cu $d = d(x,Y)$. Cum $d = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$, pentru orice $n \in N$, există $y_n \in Y$ astfel încât $d \leq \|x - y_n\| < d + 1/n$. Subspaţiul Y fiind închis în X (conform Corolarului 2.6), rezultă că A, închiderea mulţimii $\{y_n \mid n \in N\}$ este conţinută în Y. Să mai notăm că A este mărginită. Deoarece Y este finit dimensional, cu Teorema lui Riesz, avem că A este compactă, deci orice şir de elemente din A, în particular $(y_n)_n$, conţine un subşir convergent, fie acesta $(y_{n_k})_k \to y_x$. A fiind închisă, $y_x \in A \subset Y$. Din

$$d \leq \|x - y_{n_k}\| < d + \frac{1}{n_k}$$

rezultă, pentru $k \to \infty$, că $d = \|x - y_x\|$.

Exemplu. Să considerăm spaţiul liniar normat $(\mathcal{C}_K[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ şi subspaţiul său $\mathcal{P}_n[a,b]$, al tuturor polinoamelor de grad mai mic decât n. Este clar că $\mathcal{P}_n[a,b]$ este finit dimensional (o bază a sa fiind $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$). Cu propoziţia de mai sus, pentru orice funcţie continuă $x \in \mathcal{C}_K[a,b]$, există un polinom de grad cel mult n, $p(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(x)} t^k$, $\lambda_k^{(x)} \in K$, $k = 1, 2, ..., n$, astfel încât

$$\inf_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} \|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k t^k\|_\infty = \|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(x)} t^k\|_\infty .$$

2.4 Definiţia spaţiilor Hilbert şi proprietăţi elementare

Definiţie. Fie X un spaţiu liniar peste corpul K. Se numeşte produs scalar pe X o aplicaţie definită pe $X \times X$ cu valori în K având următoarele proprietăţi:
(i) $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < y, z >$, $\forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in K$;
(ii) $< x, y >= \overline{< y, x >}$, $\forall x, y \in X$;
(iii) $< x, x >> 0$, $\forall x \in X$, $x \neq 0$.

Dacă $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe X, perechea $(X, < \cdot, \cdot >)$ se numeşte spaţiu cu produs scalar sau spaţiu prehilbertian.

Observaţie. Din definiţia produsului scalar rezultă cu uşurinţa şi următoarele proprietăţi ale sale:
1) $< x, \alpha y + \beta z >= \overline{\alpha} < x, y > + \overline{\beta} < x, z >$, $\forall\, x,\, y,\, z \in X$, α, $\beta \in K$;
2) $< x, x > \geq 0$, $\forall x \in X$;
3) $< x, 0 >= 0$, $\forall x \in X$.

Pentru a simplifica notaţiile, vom folosi în consideraţiile imediat următoare prescurtarea $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$. De fapt, vom demonstra (vezi Teorema 2.16) că, într-adevăr, $\| \cdot \|$ este o normă pe X..

Exemple. **1.** Pentru $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ şi $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ în K^n să definim

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}.$$

Atunci, $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe K^n.

2. Aplicaţia $< \cdot, \cdot >$ definită pe $l^2_{\mathbf{K}} \times l^2_{\mathbf{K}}$cu valori în K prin

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$$

unde $x = (\xi_n)_n$, $y = (\eta_n)_n$ este un produs scalar pe $l^2_{\mathbf{K}}$.

3. Să definim pentru x, $y \in L^2_{\mathbf{K}}([a, b])$,

$$< x, y >= \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{dt}.$$

$(L^2_{\mathbf{K}}([a, b]), < \cdot, \cdot >)$ este un spaţiu cu produs scalar.

Propoziţia 2.11 *Fie* $(X, < \cdot, \cdot >)$ *un spaţiu cu produs scalar şi* x, y *elemente arbitrare în* X. *Atunci:*
1) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Identitatea paralelogramului).
2) În cazul în care $K = R$

$$< x, y >= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

şi când $K = C$

$$< x, y >= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$$

(Identităţile de polarizare).

Demonstraţie. Verificarea egalităţilor se face imediat, folosind proprietăţile produsului scalar.

Vom introduce în continuare câteva noţiuni geometrice ce se extind în mod natural de la spaţii finit dimensionale la spaţii cu produs scalar arbitrare.

Definiţie. Doi vectori, x şi y într-un spaţiu X cu produs scalar se numesc vectori *ortogonali* sau *perpendiculari*, (şi scriem $x \perp y$) dacă $< x, y >= 0$. Spunem că vectorul x este *ortogonal* (*perpendicular*) pe mulţimea $A \subset X$ dacă $x \perp y$, $\forall y \in A$. Mulţimile A şi B sunt ortogonale ($A \perp B$) daca $\forall x \in A$ şi $\forall y \in B$, $x \perp y$. O familie (nevidă) de vectori ai spaţiului X, $\{x_\iota \mid \iota \in I\}$ se numeşte ortogonală dacă $x_\iota \perp x_\tau$, $\iota \neq \tau$. Dacă în plus, $\|x_\iota\| = 1$, $\forall \iota \in I$, familia $\{x_\iota \mid \iota \in I\}$ se numeşte ortonormală.

Observaţie. Dacă $\{x_\iota \mid \iota \in I\}$ este o familie ortonormală în X, atunci ea este liniar independentă, deorece, din $0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ rezultă $0 =< 0, x_l >=$ $= < \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, x_l >= \sum_{k=1}^n < \alpha_k x_k, x_l >= \alpha_l$.

Propoziţia 2.12 (Teorema lui Pitagora) *Dacă $x \perp y$, atunci*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demonstraţie. Pentru x şi y doi vectori ortogonali, avem: $\|x + y\|^2 =$ $=< x + y, x + y >= \|x\|^2 + < x, y > + < y, x > + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Teorema 2.13 *Fie $\{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$ o familie ortonormală în spaţiul cu produs scalar X. Atunci, pentru orice $x \in X$, are loc egalitatea*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n | < x, x_k > |^2 + \|x - \sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k\|^2.$$

Demonstraţie. Scriindu-l pe x,

$$x = \sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k + (x - \sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k),$$

un calcul scurt, în care se folosesc proprietăţile produsului scalar, arată că $x - \sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k$ şi $\sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k$ sunt ortogonali. Atunci, cu Teorema lui Pitagora, obţinem

$$\|x\|^2 = \|\sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k\|^2 + \|x - \sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k\|^2.$$

Ţinând cont că $\{x_k\}_{k=1}^n$ este o familie ortonormală, avem

$$\|\sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k\|^2 = \sum_{k=1}^n | < x, x_k > |^2,$$

ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Corolarul 2.14 (Inegalitatea lui Bessel) *Fie* $\{x_k\}_{k=1}^n$ *o familie ortonormală în spațiul cu produs scalar* X. *Atunci, pentru orice* $x \in X$,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} | < x, x_k > |^2.$$

Corolarul 2.15 (Inegalitatea Cauchy-Schwarz) *Pentru orice doi vectori* x *și* y *ai spațiului prehilbertian* X *are loc inegalitatea*

$$| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Demonstrație. Cazul $y = 0$ este banal (inegalitatea devine $0 = 0$); să presupunem deci că $y \neq 0$. Familia formată doar din vectorul $y/\|y\|$ este o familie ortonormală. Dacă aplicăm inegalitatea lui Bessel, obținem pentru orice $x \in X$,

$$\|x\|^2 \geq | < x, \frac{y}{\|y\|} > |^2 = \frac{< x, y > |^2}{\|y\|^2}.$$

Teorema 2.16 *Fie* $(X, < \cdot, \cdot >)$ *un spațiu prehilbertian. Aplicația* $x \longrightarrow \|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$, *este o normă pe* X.

Demonstrație. Proprietățile normei, cu excepția inegalității triunghiului, se verifică imediat ținând cont de proprietățile produsului scalar. Fie acum x, $y \in X$. Atunci, cu inegalitatea Cauchy-Schwarz, avem

$$\|x + y\|^2 =< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >=$$

$$=< x, x > +2Re < x, y > + < y, y >\leq$$

$$\leq< x, x > +2| < x, y > |+ < y, y >\leq$$

$$\leq< x, x > +2 < x, x >^{\frac{1}{2}}< y, y >^{\frac{1}{2}} + < y, y >,$$

deci

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Teorema precedentă arată că dacă $(X, < \cdot, \cdot >)$ este un spațiu prehilbertian, $< \cdot, \cdot >$ induce o metrică naturală pe X, cea definită de norma $\|x\| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$:

$$d(x, y) =< x - y, x - y >^{\frac{1}{2}} .$$

Avem deci în X, noţiunile de convergenţă, completitudine, densitate din spaţii metrice (în particular, normate).

Definiţie. Un spaţiu cu produs scalar $(X, < \cdot, \cdot >)$, cu proprietatea că $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach, se numeşte spaţiu Hilbert.

Observaţie. Dacă X este spaţiu Hilbert, aplicaţia $(x, y) \longrightarrow < x, y >$ definită pe $X \times X$ cu valori în K este continuă. Într-adevăr, fie $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ astfel încât $x = \lim_n x_n$ şi $y = \lim_n y_n$. Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz,

$$| < x_n, y > - < x, y > | = | < x_n - x, y > | \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\|$$

deci, şirul numeric $(< x_n, y >)_n$ converge la $< x, y >$. Aplicând aceeaşi inegalitate, avem că

$$| < x_n - x, y_n - y > | \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n - y\|$$

ceea ce arată că $< x_n - x, y_n - y > \longrightarrow 0$, când $n \to \infty$. Totul este clar acum, observând că are loc următoarea egalitate:

$$< x_n, y_n > - < x, y > = < x_n - x, y_n - y > + < x_n, x > + < x, y_n > -2 < x, y > .$$

Exemple. 1. K^n este spaţiu Hilbert n-dimensional.

2. $l^2_{\mathbf{K}}$ este spaţiu Hilbert infinit dimensional. Familia $B = \{e_n | \ n \in N\}$ unde $e_n = (\delta_k^{(n)})_k$ este liniar independentă.

3. $L^2_{\mathbf{K}}([a, b])$ este un spaţiu Hilbert infinit dimensional, deoarece funcţiile 1, t, t^2, ... constituie o familie liniar independentă.

4. Spaţiul liniar $\mathcal{P}$ al funcţiilor polinomiale cu coeficienţi în K, definite pe intervalul real $[a, b]$, înzestrat cu produsul scalar

$$< f, g > = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

nu este complet. Aceasta o putem dovedi, de exemplu, considerând şirul $(P_n)_n$,

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} t^j.$$

care converge în $L^2_{\mathbf{K}}([a, b])$ la $g(t) = 1/(1 - \frac{1}{2}t)$. Deci, $(P_n)_n$ este şir Cauchy în $\mathcal{P}$, dar nu converge la un vector din $\mathcal{P}$ deoarece $g \notin \mathcal{P} \subset L^2_{\mathbf{K}}([a, b])$.

2.5 Proiecţii pe subspaţii închise

În continuare, dacă Y este o submulţime a unui spaţiu Hilbert X vom nota cu $Y^{\perp}$ mulţimea vectorilor din X care sunt ortogonali pe Y.

Propoziţia 2.17 *Fie Y o submulţime arbitrară a spaţiului prehilbertian X. Atunci, $Y^{\perp}$ este un subspaţiu liniar închis al spaţiului X şi $Y^{\perp} = \overline{SpY}^{\perp}$.*

Demonstraţie. Folosind liniaritatea (în prima variabilă) a produsului scalar, rezultă imediat că $Y^{\perp}$ este subspaţiu liniar al lui X. Să demonstrăm că acest subspaţiu este închis. Fie $x \in \overline{Y^{\perp}}$, deci $\exists (x_n)_n \subset Y^{\perp}$, $x_n \longrightarrow x$. Pentru $y \in Y$, $(< x_n, y >)_n$ converge la $< x, y >$. Cum $< x_n, y >= 0$ rezultă că $< x, y >= 0$, prin urmare $x \in Y^{\perp}$. Egalitatea $Y^{\perp} = \overline{SpY}^{\perp}$ se demonstrează cu argumente similare.

În cele ce urmează considerăm Y subspaţiu închis al spaţiului Hilbert X. Subspaţiul închis $Y^{\perp}$ se numeşte *complementul ortogonal* al subspaţiului Y. Teorema pe care o vom demonstra în continuare arată că există vectori ortogonali pe orice spaţiu închis, de fapt sunt atât de mulţi astfel încât $X = \{y + z \mid y \in Y,\ z \in Y^{\perp}\}$. Această proprietate geometrică importantă explică bogăţia şi varietatea rezultatelor referitoare la spaţii Hilbert faţă de cele ce se pot obţine în contextul mai general al spaţiilor Banach.

Lema 2.18 *Fie X spaţiu Hilbert şi Y subspaţiu închis al spaţiului X. Atunci, pentru orice $x \in X$, există un unic element de cea mai bună aproximare a lui x în Y, adică $\exists! y_x \in Y$ astfel încât $y_x = d(x, Y)$.*

Demonstraţie. Să notăm $d = d(x, Y)$. Atunci, există un şir $(y_n)_n \subset Y$, astfel încât

$$d \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}$$

Pentru n, $p \in N$,avem

$$\|y_{n+p} - y_n\|^2 = \|(x - y_{n+p}) - (x - y_n)\|^2 =$$

$$= 2\|x - y_{n+p}\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|x - y_{n+p} + x - y_n\|^2 =$$

$$= 2\|x - y_{n+p}\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\|x - \frac{y_{n+p} + y_n}{2}\|^2 \leq$$

$$\leq 4(d + \frac{1}{n})^2 - 4d^2 \longrightarrow 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Egalitatea a doua rezultă din Identitatea paralelogramului; iar inegalitatea din faptul că $(y_{n+p} + y_n)/2 \in Y$. Am arătat că $(y_n)_n$ este şir Cauchy în X, deci convergent, şi deoarece Y este închis, limita sa, pe care o notăm y_x se află în Y. Rezultă imediat, trecând la limită în $d \leq \|x - y_n\| < d + 1/n$, $n \to \infty$, că $\|x - y_x\| = d$. Să presupunem că z este un alt element în Y astfel încât $\|x - z\| = d$. Atunci,

$$\|z - y_x\|^2 = \|(x - z) - (x - y_x)\|^2 =$$

$$= 2\|x - z\|^2 + 2\|x - y_x\|^2 - 4\|x - \frac{z + y_x}{2}\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

ceea ce dovedeşte şi partea de unicitate.

Observaţie. Urmărind demonstraţia de mai sus, se observă că lema funcţionează într-o situaţie mai generală, anume când Y este submulţime convexă închisă a spaţiului X.

Teorema 2.19 (Teorema Proiecţiei) *Fie X spaţiu Hilbert şi Y subspaţiu închis al spaţiului X. Atunci, pentru orice element $x \in X$, există în mod unic $y \in Y$ şi $z \in Y^\perp$ astfel încât $x = y + z$.*

Demonstraţie. Fie $x \in X$. Folosind lema precedentă, există un unic element de cea mai bună aproximare a elementului x în Y, fie acesta y_x. Luăm $y = y_x$ şi $z = x - y$, deci $x = y + z$. Singurul lucru care trebuie verificat acum este că $z \in Y^\perp$, adică $z \perp Y$, sau, echivalent, $< z, v >= 0$, $\forall v \in Y$. Pentru $t \in Y$ şi $\lambda \in K$, arbitrari, avem

$$\|z\|^2 \underset{t\in Y}{\leq} \|x - t\|^2 \underset{t=y_x+\lambda v}{=} \|z - \lambda v\|^2 =$$

$$= \|z\|^2 - \lambda\overline{< z, v >} - \overline{\lambda} < z, v > + \lambda\overline{\lambda}\|v\|^2.$$

Punând aici $\lambda =< z, v > / \|v\|^2$, rezultă

$$\|z\|^2 \leq \|z\|^2 - \frac{|< z, v >|^2}{\|v\|^2} - \frac{|< z, v >|^2}{\|v\|^2} + \frac{|< z, v >|^2}{\|v\|^2},$$

deci $|< z, v >|^2 \leq 0$ ceea ce în definitiv revine la $< z, v >= 0$, $\forall v \in Y$.

Unicitatea se demonstrează cu uşurinţă: dacă x', y' sunt alte două elemente în Y, respectiv $Y^\perp$, astfel încât $x = y' + z' = y + z$, rezultă că $y' - y = z - z' \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, deci $y' = y$, $z' = z$.

Observaţie. Elementul y se mai numeşte şi proiecţia vectorului x pe subspaţiul liniar Y.

Următorul corolar rezultă în mod evident din teorema precedentă.

Corolarul 2.20 *Fie X spaţiu Hilbert şi Y subspaţiu închis propriu ($Y \subsetneq X$) al spaţiului X. Atunci $Y^\perp \neq \{0\}$.*

2.6 Baze ortonormale

Pentru definirea noţiunilor noi din această secţiune sunt necesare câteva preliminarii.

Lema 2.21 *Fie X spaţiu Hilbert şi $(x_n)_n$ un şir de vectori ortogonali din X ($< x_n, x_m >= 0$, $\forall n \neq m$) cu proprietatea că seria $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^2$ este convergentă. Atunci, seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este necondiţionat convergentă în X ($\forall \sigma$ permutare a mulţimii N, seria $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ este convergentă). Mai mult, suma seriei $\sum_{n\geq 1} x_n$ nu depinde de ordinea termenilor.*

Demonstraţie. Dacă $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şi $t_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$, din teorema lui Pitagora obţinem

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = t_{n+p} - t_n, \quad \forall n,\ p \in N$$

ceea ce dovedeşte că şirul $(s_n)_n$ este Cauchy. Cum X este spaţiu Hilbert rezultă că acest şir este convergent, sau, echivalent, seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă. Să considerăm σ o permutare a mulţimii N. Deoarece seria numerică $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^2$ este necondiţionat convergentă, rezultă, cu acelaşi argument ca mai sus că seria $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ converge. Singurul lucru pe care îl mai avem de demonstrat este că $x = y$, unde $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. În mod clar, $x - y \in \overline{\mathrm{Sp}\{x_n \mid n \in N\}}$. Pe de altă parte, pentru orice $m \in N$,

$$< x - y, x_m >= \lim_{n\to\infty} < \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}, x_m >= 0,$$

prin urmare, $x-y \in \overline{\mathrm{Sp}\{x_n \mid n \in N\}}^{\perp}$. Concludem că $x-y \in \overline{\mathrm{Sp}\{x_n \mid n \in N\}}^{\perp} \cap \overline{\mathrm{Sp}\{x_n \mid n \in N\}} = \{0\}$, deci $x = y$.

Lema 2.22 *Fie X spaţiu Hilbert şi $\{x_\iota \mid \iota \in I\}$ o familie ortonormală în X. Atunci, pentru orice $x \in X$, submulţimea I_x a mulţimii indicilor I, $I_x = \{\iota \in I \mid < x, x_i > \neq 0\}$ este cel mult numărabilă.*

Demonstraţie. Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar să notăm

$$I_x^{(\varepsilon)} = \{\iota \in I \mid |< x, x_\iota >| \geq \varepsilon\}.$$

Să presupunem că $I_x^{(\varepsilon)}$ este o mulţime infinită. Atunci, $\forall n \in N$, $\exists\ \iota_1, \iota_2, ..., \iota_n \in I_x^{(\varepsilon)}$, adică $\exists\ \iota_1, \iota_2, ..., \iota_n$ în I cu proprietatea $|< x, x_{\iota_k} >| \geq \varepsilon$, $\forall k = 1, ..., n$. Folosind Inegalitatea lui Bessel rezultă că $\sum_{k=1}^{n} |< x, x_{\iota_k} >|^2 \leq \|x\|^2$, ceea ce implică $n \cdot \varepsilon^2 \leq \|x\|^2$, $\forall n \in N$ (contradicţie). Prin urmare, am stabilit că pentru $\forall\varepsilon > 0$, $I_x^{(\varepsilon)}$ este vidă sau finită, şi cum $I_x = \bigcup_{n\geq 1} I_x^{(1/n)}$ rezultă că I_x, fiind reuniune numărabilă de mulţimi finite (sau vide), este cel mult numărabilă.

Observaţie. *Dacă* $\{x_\iota \mid \iota \in I\}$ *este o familie ortonormală în* X, *pentru orice* $x \in X$ *putem considera familia (numerică)* $\{< x, x_\iota > \mid \iota \in I\} \subset K$, *numită familia coeficienţilor Fourier ai elementului* x *în raport cu familia ortonormală* $\{x_\iota \mid \iota \in I\}$.

Notaţii. Fie X spaţiu Hilbert real sau complex, $\{x_\iota \mid \iota \in I\}$ o familie ortonormală în X, $x \in X$ şi $I_x = \{\iota \in I \mid \ < x, x_i > \neq 0\}$. Dacă I_x este finită vom nota în mod natural cu $\sum_{\iota\in I} < x, x_\iota > x_\iota$ (respectiv $\sum_{\iota\in I} | < x, x_\iota > |^2$) suma $\sum_{\iota\in I_x} < x, x_\iota > x_\iota$ (respectiv $\sum_{\iota\in I_x} | < x, x_\iota > |^2$). În cazul în care I_x nu este finită, din Lema 2.22 rezultă că există o bijecţie $\sigma : N \longrightarrow I_x$. Şirul $(< x, x_{\sigma(n)} > x_{\sigma(n)})_n$ satisface ipotezele Lemei 2.21. Într-adevăr, el este un şir ortogonal şi $\sum_{n\geq 1} \| < x, x_{\sigma(n)} > x_{\sigma(n)}\|^2 = \sum_{n\geq 1} | < x, x_{\sigma(n)} > |^2$, deci este convergentă, deoarece seria $\sum_{n\geq 1} | < x, x_{\sigma(n)} > |^2$ este (necondiţionat) convergentă (din inegalitatea lui Bessel, $t_n = \sum_{k=1}^{n} | < x, x_{\sigma(k)} > |^2 \leq \|x\|^2$). Rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} < x, x_{\sigma(n)} > x_{\sigma(n)}$ converge în X şi suma sa nu depinde de ordinea termenilor, adică de alegerea permutării σ. Să mai notăm că seria numerică $\sum_{n\geq 1} | < x, x_{\sigma(n)} > |^2$ este şi ea necondiţionat convergentă (este absolut convergentă) şi că suma sa este de asemenea independentă de alegerea permutării σ. Prin urmare, este corect să notăm cu $\sum_{\iota\in I} < x, x_\iota > x_\iota$ (respectiv $\sum_{\iota\in I} | < x, x_\iota > |^2$) suma seriei $\sum_{n\geq 1} < x, x_{\sigma(n)} > x_{\sigma(n)}$ (respectiv $\sum_{n\geq 1} | < x, x_{\sigma(n)} > |^2$), unde σ este o bijecţie $\sigma : N \longrightarrow I_x$ (sumele seriilor nu depind de alegerea lui σ).

În final, remarcăm că, ţinând cont de notaţiile introduse, pentru $\forall x \in X$, are loc

$$\sum_{\iota\in I} | < x, x_\iota > |^2 \leq \|x\|^2,$$

(Inegalitatea lui Bessel pentru familii ortonormale arbitrare).

Definiţie. O mulţime ortonormală $B = \{x_\iota \mid \iota \in I\}$ a spaţiului Hilbert X se numeşte *bază ortonormală* (sau *sistem ortonormal complet*) dacă nu există nici o submulţime ortonormală a lui X care să o conţină strict (cu alte cuvinte, B este element maximal în mulţimea părţilor ortonormale ale lui X, ordonată cu relaţia de incluziune).

Teorema 2.23 *În orice spaţiu Hilbert* $X \neq \{0\}$ *există baze ortonormale.*

Demonstraţie. Fie C familia tuturor submulţimilor ortonormale ale lui X. C

nu este vidă (deoarece $X \neq \{0\} \Rightarrow \{(1/\|x\|)x\} \in \mathcal{C}$). Ordonăm $\mathcal{C}$ cu incluziunea: $B_1 \prec B_2 \Leftrightarrow B_1 \subset B_2$. Aceasta este o relaţie de ordine parţială pe $\mathcal{C}$. Observăm că $(\mathcal{C},\prec)$ este inductiv ordonată (deoarece, dacă $(B_\alpha)_\alpha$ este o familie total ordonată, $B_0 = \bigcup_\alpha B_\alpha$ este un majorant al său). Cu Lema lui Zorn rezultă că există un element maximal B în $(\mathcal{C},\prec)$, deci o bază ortonormală a spaţiului X.

Definiţie. O submulţime A a spaţiului X se numeşte *submulţime totală* în X dacă $x \perp A \Rightarrow x = 0$.

Teorema 2.24 *Fie $B = \{x_\iota \mid \iota \in I\}$ o mulţime ortonormală în spaţiul Hilbert X. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) B este bază ortonormală;

(2) B este submulţime totală în X;

(3) $\overline{\text{Sp } B} = X$;

(4) Pentru orice $x \in X$, $x = \sum_{\iota\in I} < x, x_\iota > x_\iota$ (orice element x din X se dezvoltă în serie Fourier în raport cu B);

(5) Pentru orice $x \in X$, $\| x\|^2 = \sum_{\iota\in I} | < x, x_\iota > |^2$ (egalitatea lui Parseval).

Demonstraţie. Fie $x \in X$. Conform Teoremei 2.13, pentru orice $n \in N$, arbitrar fixat, avem

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} | < x, x_{\sigma(k)} > |^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} < x, x_{\sigma(k)} > x_{\sigma(k)}\|^2$$

(unde σ este o aplicaţie bijectivă din N în I_x). Rezultă că

$$x = \sum_{\iota\in I} < x, x_\iota > x_\iota \Longleftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{\iota\in I} | < x, x_\iota > |^2,$$

deci (4)$\Leftrightarrow$(5).

Faptul că (4)$\Rightarrow$(3) este evident. Să presupunem acum că $x \perp B$, prin urmare $x \in B^\perp = \overline{\text{Sp } B}^\perp$. Rezultă că (3)$\Rightarrow$(2).

Să demonstrăm că (2)$\Rightarrow$ (4). Fie $x \in X$, şi $z = \sum_{\iota\in I} < x, x_\iota > x_\iota$. Cum B este totală, pentru a arăta că $x = z$ este suficient să verificăm $x - z \perp B = \{x_\iota \mid \iota \in I\}$. Dacă $\kappa \in I_x$,

$$< x-z, x_\kappa >=< x, x_\kappa > - < \sum_{\iota\in I} < x, x_\iota > x_\iota, x_\kappa >=< x, x_\kappa > - < x, x_\kappa >= 0.$$

Dacă $\kappa \notin I_x$,

$$< x - z, x_\kappa >= 0 - < \sum_{\iota \in I} < x, x_\iota > x_\iota, x_\kappa >= 0 - 0 = 0.$$

Mai departe, dacă (1) este adevărată, şi $x \in X$, $x \neq 0$, atunci $B' = \{(1/\|x\|)x\} \cup \{x_\iota \mid \iota \in I\}$ este o mulţime ortonormală care conţine B, $B \subsetneq B'$ (este contrazisă maximalitatea lui B). Prin urmare, x trebuie să fie nul. Am demonstrat că (1)$\Rightarrow$ (2). Implicaţia inversă este imediată deoarece dacă B' este o mulţime ortonormală astfel încât $B \subsetneq B'$, există $x \in B' \backslash B$. Rezultă că $x \neq 0$ şi $x \perp B$ (contradicţie cu (1)).

Exemple. **1.** În K^n, baza algebrică standard $B = \{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$, (unde $e_k = (\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, ..., \delta_n^{(k)})$) este în mod evident mulţime totală în spaţiul Hilbert K^n, deci este bază ortonormală.

2. În l_K^2 mulţimea $B = \{e_n \mid n \in N\}$ unde $e_n = (\delta_k^{(n)})_k$, este mulţime ortonormală în B; totodată, ea este şi mulţime totală, deoarece, dacă $x = (\xi_k)_k \in l_K^2$ este ortogonal pe B, adică $< x, e_n >= 0$, $\forall n \in N$, cum $< x, e_n >= = \xi_n$, rezultă că $\xi_n = 0$, $\forall n \in N$, deci, în definitiv $x = 0$. Conform teoremei precedente, $B = \{e_n \mid n \in N\}$ este bază ortonormală în l_K^2 .

Lema 2.25 *Fie $\{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$ o familie ortonormală în spaţiul prehilbertian X şi Y subspaţiul liniar generat $\{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$. Atunci, pentru orice $x \in X$, vectorul $y_x = \sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k$ este elementul de cea mai bună aproximare a vectorului x în Y. În plus*

$$d(x, Y) = (\|x\|^2 - \|x - \sum_{k=1}^n < x, x_k > x_k\|^2)^{\frac{1}{2}} \text{şi} \quad x - y_x \perp Y.$$

Demonstraţie. Să considerăm un element arbitrar z în Y, $z = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, $\{\alpha_k\}_{1 \leq k \leq n} \subset K$. Atunci,

$$\|x - z\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\|^2 =< x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k >=$$

$$= \|x\|^2 - < x, \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k > - < \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, x > + < \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k >=$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{< x, x_k >} + \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} < x, x_k > + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{\alpha_k} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} < x, x_k > \overline{< x, x_k >} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - < x, x_k >)(\overline{\alpha_k} - \overline{< x, x_k >}) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} | < x, x_k > |^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - < x, x_k > |^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} | < x, x_k > |^2 + \|y_x - z\|^2.$$

Deci,

$$d(x, Y) = \inf_{z \in Y} \|x - z\| \geq (\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} | < x, x_k > |^2)^{\frac{1}{2}}$$

şi egalitatea are loc dacă şi numai dacă $z = y_x$.

Un calcul simplu, bazat pe proprietăţile produsului scalar arată că $x - \sum_{k=1}^{n} < x, x_k > x_k$ este ortogonal pe Y.

Teorema 2.26 *Fie $(u_n)_n$ un şir de vectori liniar independenţi în spaţiul prehilbertian X. Atunci, există un şir ortonormal $(v_n)_n$ astfel încât pentru orice $m \in N$, spaţiul liniar generat de $(u_j)_{1 \leq j \leq m}$ coincide cu cel generat de $(v_j)_{1 \leq j \leq m}$.*

Demonstraţie. Vom construi şirul $(v_n)_n$ în modul următor: $v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1$, unde $w_1 = u_1$, şi pentru $n \in N$, $n \geq 2$, arbitrar,

$$v_n = \frac{1}{\|w_n\|} w_n, \text{ unde } w_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} < u_n, v_k > v_k.$$

Conform lemei precedente, pentru orice $n \in N$, vectorul $\sum_{k=1}^{n-1} < u_n, v_k > v_k$, este elementul de cea mai bună aproximare a lui u_n în spaţiul liniar generat de $(v_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ şi, deci w_n este ortogonal pe acest subspaţiu liniar al lui X. Cu aceasta, este clar că şirul $(v_n)_n$ construit mai sus satisface cerinţele din enunţ.

Observaţie. Procedeul utilizat în demonstraţia teoremei pentru a construi şirul ortonormal $(v_n)_n$ pornind de la şirul de vectori liniar independenţi $(u_n)_n$ este cunoscut sub numele de *procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt* .

Capitolul 3

Operatori liniari şi continui pe spaţii Banach

3.1 Spaţiul normat $\mathcal{B}(X, Y)$

În cele ce urmează X şi Y sunt două spaţii normate peste acelaşi corp K (ambele reale sau ambele complexe). Vom folosi acelaşi simbol, $\|\cdot\|$, pentru ambele norme pe X, respectiv pe Y.

Definiţie. Fie $(X, \|\cdot\|)$ şi $(Y, \|\cdot\|)$ doua spaţii normate. Spunem că o aplicaţie $T : X \longrightarrow Y$ este mărginită dacă există $M > 0$ astfel încât

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Propoziţia 3.1 *Dacă T este un operator liniar definit pe spaţiul normat $(X, \|\cdot\|)$ cu valori în spaţiul normat $(Y, \|\cdot\|)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(1) Aplicaţia T este continuă pe X;
(2) Aplicaţia T este continuă în zero;
(3) Aplicaţia T este mărginită.
Demonstraţie. Este evident că (1)$\Rightarrow$ (2); să demonstrăm că şi implicaţia inversă este adevărată. Să considerăm $x_o \in X$, arbitrar. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât dacă $\|u\| < \delta_\varepsilon$, $\|T(u)\| < \varepsilon$. Punând aici $u = x - x_o$ şi folosind liniaritatea lui T, obţinem că pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\|T(x) - T(x_o)\| < \varepsilon$, $\forall x$ cu $\|x - x_o\| < \delta_\varepsilon$, adică T este o aplicaţie continuă în x_o.

Să presupunem acum că T este continuă în zero ((2)) şi că nu este mărginită. Atunci, pentru orice m natural, există $x_m \in X$ astfel încât $\|T(x_m)\| > m\|x_m\|$. Şirul $(y_m)_m$ definit prin

$$y_m = \frac{1}{m\|x_m\|} \cdot x_m$$

converge clar la zero şi $\|T(y_m)\| > 1$, fapt care contrazice continuitatea lui T în zero. Am văzut deci că (2)$\Rightarrow$ (3). Implicaţia (3)$\Rightarrow$ (1) este banală.
Notaţie. Mulţimea tuturor operatorilor liniari şi mărginiţi între doua spaţii normate $(X, \|\cdot\|)$ şi $(Y, \|\cdot\|)$ va fi notată cu $\mathcal{B}(X,Y)$, şi cu $\mathcal{B}(X)$ când $X = Y$. În cazul particular $(Y, \|\cdot\|) = (K, |\cdot|)$, adică atunci când operatorii liniari sunt funcţionale liniare, spaţiul $\mathcal{B}(X,Y)$ va fi notat prin X^* (X^* se numeşte dualul spaţiului normat $(X, \|\cdot\|)$).

Observaţie. Este clar că mulţimea $\mathcal{B}(X,Y)$ este un subspaţiu liniar al spaţiului $\mathcal{L}(X,Y)$.
Propozitia 3.2 *Aplicaţia reală pe $B(X,Y)$, $T \longmapsto \|T\|$, definită prin*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$$

este o normă pe $B(X,Y)$.
Demonstraţie. Deoarece T este operator mărginit, mulţimea de numere reale $\{\|T(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$ este mărginită superior, deci aplicaţia este bine definită. Dacă $\|T\| = 0$, atunci, pentru orice $x \neq 0$, $T((1/\|x\|)\cdot x) = 0$, deci $T(x) = 0$, prin urmare $T = 0$. Acum, considerând T_1, $T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$ şi $\|x\| \leq 1$, avem

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| = \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|,$$

deci $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$. Pentru $\alpha \in K$ arbitrar şi $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, din

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\alpha T)(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\alpha| \cdot \|T(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$$

rezultă că $\|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\|$.

Observaţii. **1.** *În continuare $\mathcal{B}(X,Y)$ va fi întotdeauna înzestrat cu norma de mai sus.*

2. Din definiţia normei pe $\mathcal{B}(X,Y)$, rezultă că pentru orice $T \in \mathcal{B}(X,Y)$,

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Propozitia 3.3 *Fie T în $B(X,Y)$. Atunci*

$$\|T\| = \inf \ \{M > 0 \mid \|T(x)\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X\} =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Demonstraţie. Să notăm cu

$$\|T\|_1 = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|, \ \|T\|_2 = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|,$$

$$\|T\|_3 = \inf \ \{M > 0 \mid \|T(x)\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X\} \text{şi} \ \ \|T\|_4 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Este clar că $\|T\|_1 \leq \|T\|$ şi că $\|T\|_2 \leq \|T\|$.

Fie acum x arbitrar în X cu $\|x\| \leq 1$. Deoarece $\|n/(n+1)x\| < 1$ avem că

$$\|T\left(\frac{n}{n+1}x\right)\| \leq \|T\|_2.$$

Rezultă că

$$\|Tx\| \leq \frac{n+1}{n}\|T\|_2, \quad \forall n \in N,$$

ceea ce dovedeşte că $\|T\| = \|T\|_2$

Să mai verificăm şi că $\|T\|_3 \leq \|T\|_1$. Pentru fiecare $x \neq 0$, cum $x/\|x\| = 1$,

$$\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq \|T\|_1,$$

adică $\|Tx\| \leq \|T\|_1\|x\|$, deci $\|T\|_3 \leq \|T\|_1$. Mai departe, dacă x este în X şi $\|x\| = 1$, $\|Tx\| \leq M$, deci $\|T\|_1 \leq \|T\|_3$. Am demonstrat că $\|T\|_3 = \|T\|_1$.

Dacă $\|x\| \leq 1$, concludem în mod similar că $\|T\| \leq \|T\|_3 = \|T\|_1$. În plus, din $\|Tx\| \leq \|T\|_4\|x\|$, rezultă că $\|T\|_3 \leq \|T\|_4$. Cum $\|T\|_4 \leq \|T\|_1$ este evidentă, am verificat toate egalitaţile.

Exemple. 1. Fie M_α operatorul definit pe $\mathcal{C}_K([0,1])$ prin formula $M_\alpha(x) = \alpha(t) \cdot x(t)$, unde $\alpha \in \mathcal{C}_K([0,1])$. Este clar că M_α este liniar şi, deoarece pentru orice $x \in \mathcal{C}_K([0,1])$,

$$\|M_\alpha(x)\| = \sup_{t\in[0,1]} |\alpha(t) \cdot x(t)| \leq \|\alpha\| \cdot \|x\|,$$

rezultă că el este şi mărginit. Deci, $M_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_K([0,1]))$. În plus, $\|M_\alpha\| \leq \|\alpha\|$. Pe de altă parte, cum funcţia x_o definită prin $x_o(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$ are norma unu, avem

$$\|M_\alpha\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|M_\alpha(x)\| \geq \|M_\alpha(x_o)\| = \sup_{t\in[0,1]} |\alpha(t)| = \|\alpha\|.$$

Rezultă că $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|$.

2. Pentru $(\lambda_n)_n$ un şir din $l^\infty_{\mathbf{K}}$ să definim aplicaţia T pe $l^p_{\mathbf{K}}$ prin

$$T(\xi_n)_n = (\lambda_n \xi_n)_n.$$

Observăm că pentru $x = (\xi_n)_n \in l^p_{\mathbf{K}}$, şirul $(\lambda_n \xi_n)_n$ este de asemenea p-absolut sumabil deoarece

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_n |\lambda_n| \cdot \|(\xi_n)_n\|.$$

Rezultă că operatorul T definit mai sus (numit operator diagonal) este în $\mathcal{B}(l^p_{\mathbf{K}})$ şi că $\|T\| \leq \sup\limits_n |\lambda_n|$. Mai mult, pentru fiecare număr natural n, să considerăm în $l^p_{\mathbf{K}}$ şirul $e_n = (\delta_k^{(n)})_k$, care în mod clar este unitar, $\|e_n\| = 1$. Atunci,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \geq \|T(e_n)\| = |\lambda_n|,$$

deci $\|T\| \geq \sup\limits_n |\lambda_n|$. Am arătat că $\|T\| = \sup\limits_n |\lambda_n|$.

3. Pe $\mathcal{C}_K([0,1])$ să definim aplicaţia $x \longmapsto Tx$, cu

$$Tx(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,\mathrm{dt}, \ \forall s \in [0,1],$$

unde $k \in \mathcal{C}_K([0,1] \times [0,1])$. Este uşor de văzut că $Tx \in \mathcal{C}_K([0,1])$, $\forall x \in \mathcal{C}_K([0,1])$. Să verificăm că $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_{\mathbf{K}}([0,1]))$ (Operatorul T se numeşte operatorul integral de nucleu k).

Liniaritatea lui T este imediată, iar continuitatea reiese din

$$\|Tx\| = \sup_{s\in[0,1]} |Tx(s)| \leq \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)| \cdot |x(t)|\,\mathrm{dt} \leq$$

$$\leq \|x\| \cdot \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|\,\mathrm{dt}, \ \forall x \in \mathcal{C}_{\mathbf{K}}([0,1]).$$

Mai mult, $\|T\| \leq \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|\,\mathrm{dt}$. Se poate arăta că

$$\|T\| = \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|\,\mathrm{dt}.$$

4. Orice aplicaţie liniară $T \in \mathcal{L}((K^n, \|\cdot\|))$ este mărginită, deci, $\mathcal{L}(K^n) = \mathcal{B}(K^n)$. Pentru a justifica aceasta, deoarece normele pe K^n sunt echivalente, $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$, este suficient să demonstrăm că operatorul liniar T este mărginit pe K^n înzestrat cu norma euclidiană, $\|\cdot\|_2$. Fie $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, baza algebrică standard a spaţiului liniar K^n, deci oricare $x \in K^n$, $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $\xi_k \in K$. Atunci, cu inegalitatea lui Hölder avem:

$$\|T(x)\|_2 = \|T(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k)\|_2 = \|\sum_{k=1}^n \xi_k T(e_k)\|_2 \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \cdot \|T(e_k)\|_2 \leq$$

$$\leq (\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n \|T(e_k)\|_2{}^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=1}^n \|T(e_k)\|_2{}^2)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2,$$

ceea ce dovedeşte continuitatea operatorului T.

Să remarcăm că pe baza unor argumente similare se poate demonstra că orice operator liniar pe un spaţiu normat finit dimensional, cu valori într-un spaţiu normat oarecare, este continuu. În particular, dacă $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat finit dimensional, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(X)$.

Să calculăm acum norma operatorului $T \in \mathcal{L}(K^n)$, $\|T\|_\infty$, T având matricea în baza canonică $(a_{kj})_{1\leq k,j\leq n}$, când K^n este înzestrat cu $\|\cdot\|_\infty$. Operatorul T lucrează deci în modul urmator:

$$T(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = (\sum_{j=1}^n a_{1j}\xi_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}\xi_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}\xi_j).$$

Amintim că $\|(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\|_\infty = \max(|\xi_1|, |\xi_2|, ..., |\xi_n|)$, prin urmare dacă $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, avem

$$\|T(x)\|_\infty = \|T(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |\sum_{j=1}^n a_{kj}\xi_j| \leq$$

$$\leq \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|\ |\xi_j| \leq (\max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|)\|x\|_\infty,$$

de unde rezultă că

$$\|T\|_\infty \leq \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|.$$

Arătăm că avem chiar egalitate. Să notăm

$$M = \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}|,$$

(pentru un anume $l \in \{1, 2, ..., n\}$). Pentru fiecare $j \in \{1, 2, ..., n\}$, scriem numărul a_{lj} sub formă trigonometrică $a_{lj} = |a_{lj}|\, e^{i\theta_j}$. Să considerăm vectorul $z \in K^n$, $z = (e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, ..., e^{-i\theta_n})$, deci, $\|z\|_\infty \leq 1$. Atunci, cum $\|T\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|T(x)\|_\infty$,

$$\|T\|_\infty \geq \|T(z)\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |\sum_{j=1}^{n} a_{kj} e^{-i\theta_j}| \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{lj} e^{-i\theta_j}| = M.$$

În încheiere să calculăm norma operatorului $T \in \mathcal{L}((K^n, \|\cdot\|_1))$, $\|T\|_1$, matricea lui T în baza standard fiind ca şi mai înainte matricea $(a_{kj})_{1\leq k,j\leq n}$. Dacă $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, avem

$$\|T(x)\|_1 = \|T(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_j| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\ |\xi_j| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|)|\xi_j| \leq (\max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|\ ) \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| = (\max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|\ )\|x\|_1,$$

de unde rezultă că

$$\|T\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|.$$

Arătăm că avem chiar egalitate. Să notăm

$$M' = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{kl}|,$$

(pentru un anume $l \in \{1, 2, ..., n\}$). Să considerăm vectorul $z \in K^n$, $z = (\delta_j^{(l)})_{1 \leq j \leq n}$, pentru care $\|z\|_1 = 1$. Atunci, cum $\|T\|_1 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|T(x)\|_1$,

$$\|T\|_1 \geq \|T(z)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} | \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \delta_j^{(l)} | = \sum_{k=1}^{n} |a_{kl}| = M'.$$

Teorema 3.4 *Dacă Y este spaţiu Banach, spaţiul $B(X, Y)$ este de asemenea Banach.*

Demonstraţie. Fie $(T_n)_n$ un şir Cauchy din $\mathcal{B}(X, Y)$. Trebuie să arătăm că există T un operator liniar şi continuu astfel încât $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. Cum pentru orice element arbitrar $x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|, \quad \forall n, m \in N,$$

rezultă că $(T_n x)_n$ este şir Cauchy în Y, $\forall x \in X$. Spaţiul normat Y fiind complet, $(T_n x)_n$ converge către elementul (unic) $y \in Y$. Să definim $Tx = y$, $\forall x \in X$. Se verifică imediat că T este un operator liniar:

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} (\alpha T_n x + \beta T_n y) =$$

$$= \alpha \lim_{n \to \infty} T_n x + \beta \lim_{n \to \infty} T_n y = \alpha T x + \beta T y, \ \forall \alpha, \beta \in K, \ x, y \in X.$$

Deoarece $(T_n)_n$ este şir Cauchy în $\mathcal{B}(X, Y)$, rezultă că acest şir este mărginit, deci există $M > 0$ astfel încât $\|T_n\| \leq M$, $\forall n$. Cum $\forall x \in X$, $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\|$, avem

$$\|Tx\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\| \leq M \|x\|,$$

deci $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Mai trebuie să arătăm că $T_n \longrightarrow T$ în topologia normei din $\mathcal{B}(X, Y)$. Pentru $\varepsilon > 0$, există n_ε astfel încât pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$, $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Deoarece pentru orice element arbitrar x în X

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$$

rezultă că pentru $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ avem că $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$. Fixând $n \geq n_\varepsilon$, pentru $m \to \infty$ inegalitatea precedentă devine

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|, \ \forall x \in X,$$

ceea ce implică

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon,$$

adică $T_n \longrightarrow T$ în $\mathcal{B}(X,Y)$.

În plus, norma fiind continuă pe $\mathcal{B}(X,Y)$, avem şi că $\|T_n\| \longrightarrow \|T\|$.

Observaţie. Se poate arăta că funcţionează şi o reciprocă a acestei teoreme, mai precis, dacă $\mathcal{B}(X,Y)$ este spaţiu Banach, Y este şi el spaţiu Banach.

Corolarul 3.5 *Dualul unui spaţiu normat este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema precedentă, deoarece $(K, |\cdot|)$ este complet şi $X^* = \mathcal{B}(X,K)$.

3.2 Teoreme de prelungire

3.2.1 Extensia prin continuitate

Teorema 3.6 (Teorema de prelungire prin continuitate) *Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu normat şi X_o un subspaţiu dens al spaţiului X. Să presupunem că T este un operator liniar şi continuu definit pe spaţiul normat $(X_o, \|\cdot\|)$ cu valori în spaţiul Banach $(Y, \|\cdot\|)$. Atunci, T poate fi prelungit în mod unic la un operator liniar şi continuu $\widetilde{T} : X \longrightarrow Y$. Mai mult, $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.*

Demonstraţie. Pentru orice element $x \in X$, există un şir $(x_n)_n$ în X_o cu $x_n \longrightarrow x$ când $n \to \infty$. Deoarece $(x_n)_n$ este convergent, el este şi Cauchy, deci, pentru $\varepsilon > 0$, putem găsi n_ε astfel încât dacă $n, m \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - x_m\| \leq$ $\leq \varepsilon/\|T\|$. Atunci,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon,$$

ceea ce dovedeşte că $(Tx_n)_n$ este şir Cauchy în Y. Cum Y este Banach, există un unic element y în Y astfel încât $Tx_n \longrightarrow y$. Să definim $\widetilde{T}x = y$, $\forall x \in X$. Să demonstrăm mai întâi că această definiţie este independentă de alegerea şirului $(x_n)_n$, $x_n \longrightarrow x$. Dacă $(y_n)_n$ este un alt şir convergent la x, cum

$$0 = T(\lim_n(x_n - y_n)) = \lim_n T(x_n - y_n) = \lim_n Tx_n - \lim_n Ty_n,$$

rezultă că $\lim\limits_n Tx_n = \lim\limits_n Ty_n$. Să arătăm în continuare că operatorul $\widetilde{T}$ astfel definit este liniar. Dacă $x, y \in X$, există şirurile $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ în X_o cu $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow x$ când $n \to \infty$. Deoarece $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ avem că

$$\widetilde{T}(x+y) = \lim_n T(x_n + y_n) = \lim_n Tx_n + \lim_n Ty_n = \widetilde{T}(x) + \widetilde{T}(y).$$

Se verifică de asemenea cu uşurinţa că $\widetilde{T}(\alpha x) = \alpha\widetilde{T}(x)$, $\forall \alpha \in K$, $x \in X$. În continuare vom demonstra că $\widetilde{T}$ este mărginit. Pentru $x \in X$, $x = \lim\limits_n x_n$, $(x_n)_n \subset X_o$,

$$\|\widetilde{T}x\| = \|\lim_n T(x_n)\| = \lim_n \|T(x_n)\| \leq \lim_n \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| \cdot \|x\|$$

deci $\widetilde{T}$ este mărginit şi $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$.

Este clar că $\widetilde{T}$ prelungeşte pe T, pentru că dacă $x \in X_o$, $x = \lim\limits_n x_n$, cu $x_n = x$, $\forall n$. Atunci,

$$\widetilde{T}x = \lim_n T x_n = Tx.$$

Să mai arătăm că operatorul $\widetilde{T}$ definit mai sus este unica prelungire liniară şi continuă la X a operatorului T. Să presupunem că mai există şi un alt operator liniar $\widehat{T}$ pe X având aceleaşi proprietăţi ca $\widetilde{T}$. Fie atunci, $x \in X$ şi $(x_n)_n$ în X_o, $x_n \longrightarrow x$ când $n \to \infty$. Atunci, cum $\widehat{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ avem

$$\widehat{T}(x) = \lim_n \widehat{T}(x_n) = \lim_n T(x_n) = \widetilde{T}x,$$

deci $\widehat{T}$ coincide cu $\widetilde{T}$.

Ca să arătăm că $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$, cum deja am văzut că $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$, mai trebuie să verificăm $\|\widetilde{T}\| \geq \|T\|$, ceea ce rezultă din

$$\|\widetilde{T}\| = \sup_{x \in X,\ \|x\| \leq 1} \|\widetilde{T}x\| \geq \sup_{x \in X_o,\ \|x\| \leq 1} \|\widetilde{T}x\| = \sup_{x \in X_o,\ \|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|.$$

3.2.2 Teorema Hahn-Banach în spaţii normate şi consecinţele sale

Teorema 3.7 (Teorema de prelungire Hahn-Banach în spaţii normate) *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat şi X_o un subspaţiu liniar al spaţiului X. Să presupunem că f este o funcţională liniară şi continuă pe X_o. Atunci, f poate fi prelungită la o funcţionala liniară şi continuă $\widetilde{f}$ pe X, cu păstrarea normei, $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$.*

Demonstraţie. Cum $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X_o$, şi $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ este o seminormă pe X, Cu Teorema Hahn-Banach obţinem că există o prelungire $\widetilde{f}$ a funcţionalei f la întreg spaţiul, astfel încât $|\widetilde{f}(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$. Rezultă că $\|\widetilde{f}\| \leq \|f\|$. Pe de altă parte

$$\|\widetilde{f}\| = \sup_{x \in X,\ \|x\| \leq 1} \|\widetilde{f}(x)\| \geq \sup_{x \in X_o,\ \|x\| \leq 1} \|\widetilde{f}(x)\| = \sup_{x \in X_o,\ \|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \|f\|,$$

deci $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Corolarul 3.8 *Pentru orice $x_o \in X$, există o funcţională liniară şi continuă f pe X astfel încât $f(x_o) = \|x_o\|$ şi $\|f\| = 1$.*

Demonstraţie. Existenţa lui $f \in X^*$ astfel încât $f(x_o) = \|x_o\|$ şi $\|f\| \leq 1$ este dovedită de Corolarul 1.6 şi Corolarul 1.8, unde $p(x) = \|x\|$. Dacă ne amintim că f este prelungirea funcţionalei liniare mărginite f_o definită pe subspaţiul lui X generat de $\{x_o\}$ prin $f_o(\lambda x_o) = \lambda\|x_o\|$, care, dacă $x_o \neq 0$ are norma egală cu unu, rezultă că $\|f\| = 1$. Dacă $x_o = 0$, totul este clar.

Următoarele rezultate sunt consecinţe imediate ale corolarului precedent.

Corolarul 3.9 *Dacă x_o este un element al spaţiului normat X ($X \neq \{0\}$) cu proprietatea că $f(x_o) = 0$, $\forall f \in X^*$, atunci $x_o = 0$.*

Corolarul 3.10 *Dacă X este spaţiu normat nenul, $X \neq \{0\}$, atunci dualul său este nenul, $X^* \neq \{0\}$.*

3.3 Principiul mărginirii uniforme. Convergenţă punctuală şi convergenţă în normă

Teorema 3.10 (Principiul mărginirii uniforme) *Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu Banach. Fie $\{T_\iota\}_{\iota\in I}$ o familie de operatori liniari şi continui definiţi pe X cu valori într-un spaţiu normat $(Y, \|\cdot\|)$ astfel încât pentru orice $x \in X$, mulţimea $\{T_\iota(x) | \iota \in I\} \subset Y$ este mărginită. Atunci, familia de operatori $\{T_\iota\}_{\iota\in I}$ este mărginită în spaţiul $B(X, Y)$.*

Demonstraţie. Pentru orice $n \in N$ să notăm

$$A_n = \{x \in X \mid \|T_\iota(x)\| \leq n, \ \forall \iota \in I\}.$$

Conform ipotezei, fiecare element x din X este conţinut într-una din mulţimile A_n, adică $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Fiecare mulţime A_n este închisă (deoarece $A_n = \bigcap_{\iota\in I} g_\iota^{-1}([0, n])$, unde g_ι este aplicaţia numerică continuă pe X, $g_\iota = \|\cdot\| \circ T_\iota$). Conform Teoremei lui Baire, $\exists n_o$ astfel încât $\overset{\circ}{A}_n \neq \emptyset$. Rezultă că $\overset{\circ}{A}_n$ conţine o bilă $B(x_o, r)$. Pentru $x \neq 0$ arbitrar, elementul

$$y_x = x_o + \frac{r}{2\|x\|}x$$

este în bila $B(x_o, r)$. Prin urmare, pentru orice $x \in X$ şi $\iota \in I$,

$$\|T_\iota(x)\| = \|T_\iota\left(\frac{2\|x\|}{r}(y_x - x_o)\right)\| = \frac{2\|x\|}{r}\|T_\iota(y_x) - T_\iota(x_o)\| \leq$$

$$\leq \frac{2\|x\|}{r}\left(\|T_\iota(y_x)\| + \|T_\iota(x_o)\|\right) \leq \frac{4n_o}{r}\|x\|,$$

ceea ce dovedeşte că $\|T_\iota\| \leq 4n_o/r$, $\forall \iota \in I$.

Definiţie Un şir $(T_n)_n \subset \mathcal{B}(X, Y)$ se numeşte convergent punctual dacă pentru orice element $x \in X$ şirul $(T_n x)_n$ este convergent în Y.

Observaţii. 1. *Dacă şirul $(T_n)_n$ din $\mathcal{B}(X, Y)$ este convergent punctual, atunci aplicaţia T definită pe X cu valori în Y, $T(x) = \lim\limits_n T_n(x)$, este bine definită (din unicitatea limitei) şi este liniară (deoarece fiecare operator T_n este liniar şi adunarea şi înmulţirea cu scalari sunt operaţii continue în spaţii normate). Aplicaţia liniară T din X în Y, definită în acest mod se numeşte limita punctuală a şirului $(T_n)_n$.*

2. Fie $(T_n)_n$ un şir convergent în spaţiul normat $\mathcal{B}(X, Y)$. Să notăm cu T limita sa. Cum pentru orice x în X,

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\|$$

rezultă că şirul $(T_n)_n$ converge punctual la T. Reciproca nu este în general adevărată. Mai precis, dacă un şir din $\mathcal{B}(X, Y)$ converge punctual, nu rezultă că el converge şi în spaţiul normat $\mathcal{B}(X, Y)$, afirmaţie ilustrată de următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(T_n)_n$ şirul din $\mathcal{B}(l^p_K)$ definit prin

$$T_n((\xi_k)_k) = (0, 0, ..., 0, \xi_n, \xi_{n+1}, ...).$$

Să remarcăm că fiecare operator T_n este un operator diagonal (Exemplul 2), definit de şirul mărginit $(\lambda_k)_k$, cu $\lambda_k = 0$ pentru $k < n$ şi $\lambda_k = 1$ pentru $k \geq n$, deci $\|T_n\| = 1$, $\forall n$. Fie $x = (\xi_k)_k \in l^p_K$ arbitrar fixat. Deoarece $\|T_n(x)\|^p = \sum_{m=n}^{\infty} |\xi_m|^p \longrightarrow 0$, când $n \to \infty$, concludem că $\lim\limits_n T_n(x) = 0$, deci şirul $(T_n)_n$ converge punctual la zero (operatorul nul). Să presupunem acum că există T în $\mathcal{B}(l^p_K)$ astfel încât $(T_n)_n$ converge la T în normă. Ţinând cont de observaţia precedentă, în mod necesar T ar trebui să fie aplicaţia nulă şi atunci, $\|T_n\| \longrightarrow 0$, când $n \to \infty$, ceea ce este imposibil deoarece $\|T_n\| = 1$, $\forall n \in N$.

3. Menţionăm că în cazul când $(T_n)_n$ este un şir din $\mathcal{B}(K^n)$ care converge punctual la T, atunci el coverge şi în normă, cu alte cuvinte, în spaţiul $\mathcal{B}(K^n)$, un şir este convergent punctual dacă şi numai dacă este convergent în normă. Pentru a demonstra că în acest caz, (şi în general în cazul spaţiului $\mathcal{B}(X)$, unde X este de dimensiune finită) convergenţa punctuală o implică pe cea în normă, să notăm că $\mathcal{B}(K^n)$ având dimensiune finită, toate normele pe acest spaţiu sunt echivalente. Prin urmare vom considera pe $\mathcal{B}(K^n)$, norma operatorială generată de norma $\|\cdot\|_1$ pe K^n. Amintim că dacă $T \in \mathcal{B}((K^n, \|\cdot\|_1))$, T având matricea în baza canonică $(a_{kj})_{1\le k,j\le n}$, conform Exemplului 4,

$$\|T\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|$$

Totodată, pentru simplificarea scrierii este bine să observăm acum că dacă $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este baza standard a spaţiului K^n, atunci, $\forall k, j$,

$$a_{kj} = < Te_j, e_k > .$$

Fie $(T_m)_m \subset \mathcal{B}(K^n)$, un şir de operatori convergând punctual la T. Să notăm pentru fiecare m, matricea în baza canonică a operatorului T_m cu $(a_{kj}^{(m)})_{1\le k,j\le n}$. Fixând k şi j, cum

$$\lim_{m\to\infty} |a_{kj}^{(m)} - a_{kj}| = \lim_{m\to\infty} | < (T_m - T)e_j, e_k > | = 0,$$

rezultă că $\lim\limits_{m\to\infty} |a_{kj}^{(m)} - a_{kj}| = 0$, $\forall k, j$. Folosind aceasta şi

$$\|T_m - T\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}^{(m)} - a_{kj}| \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}^{(m)} - a_{kj}|,$$

avem că $\lim\limits_{m\to\infty} \|T_m - T\|_1 = 0$, şi demonstraţia este încheiată.

Cu argumente similare, se poate arăta că dacă X şi Y sunt spaţii normate finit dimensionale, convergenţa punctuală a unui şir din $\mathcal{B}(X, Y)$ atrage după sine convergenţa în norma din $\mathcal{B}(X, Y)$.

Teorema următoare arată că limita punctuală a unui şir din $\mathcal{B}(X, Y)$ (X şi Y spaţii arbitrare, X Banach) se află de asemenea în $\mathcal{B}(X, Y)$. Aşa cum am subliniat mai sus (a se vedea Observaţia 2), aceasta nu înseamnă că dacă un şir din $\mathcal{B}(X, Y)$ converge punctual, atunci el converge şi în normă (în $\mathcal{B}(X, Y)$).

Teorema 3.11 (Banach-Steinhauss) *Fie X spaţiu Banach, Y spaţiu normat* *şi* $(T_n)_n \subset B(X,Y)$ *un şir convergent punctual. Atunci* T, *limita punctuală a şirului* $(T_n)_n$, *este un operator liniar şi continuu,* $T \in B(X,Y)$. *În plus, şirul numeric* $(\|T_n\|)_n$ *este mărginit şi* $\|T\| \leq \sup\limits_n \|T_n\|$.

Demonstraţie. Fie $(T_n)_n$ un şir convergent punctual de operatori din $\mathcal{B}(X,Y)$ şi T limita sa punctuală. Am observat deja că aplicaţia T este liniară. Cum pentru orice x şirul $(T_n(x))_n$ este convergent în Y, rezultă că submulţimea $\{T_n(x) | n \in N\} \subset Y$ este mărginită, deci, conform Principiului mărginirii uniforme, există $M > 0$, astfel încât $\|T_n\| \leq M$, $\forall n$. Atunci, deoarece pentru $\forall x$ şi $\forall n$, $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|$, rezultă că

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X,$$

prin urmare, $\|T\| \leq \sup\limits_n \|T_n\|$.

3.4 Teorema aplicaţiei deschise şi Teorema aplicaţiei inverse

Şi demonstraţia acestor teorme fundamentale se bazează pe Teorema lui Baire.

Teorema 3.12 (Teorema aplicaţiei deschise) *Fie* X, Y *spaţii Banach şi* T *o aplicaţie surjectivă din* $B(X,Y)$. *Atunci, imaginea prin* T *a oricărei submulţimi deschise din* X, *este o submulţime deschisă a spaţiului* Y *(adică* T *este o aplicaţie deschisă definită pe* X *cu valori în* Y*).*

Demonstraţie. Am organizat demonstraţia în trei etape.

(1) *Fie* T *un operator liniar şi mărginit, surjectiv definit pe spaţiul normat* X *cu valori în spaţiul Banach* Y. *Atunci, pentru orice* $r > 0$, *există* $\alpha_r > 0$ *astfel încât* $B(\alpha_r) \subset \overline{T(B(r))}$.

Să remarcăm mai întâi că dacă r este o constantă pozitivă arbitrară ($r > 0$), $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB(r/2)$. Atunci, $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B(r/2))$, şi, cum T este surjectiv, avem $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B(r/2))$. Deoarece Y este spaţiu metric complet, cu Teorema lui Baire, rezultă că există n_o natural astfel încât aderenţa mulţimii $n_oT(B(r/2))$ are interiorul nevid. Ţinând cont că aplicaţia pe Y, $y \longmapsto n_oy$ este un homeomorfism rezultă că $\overset{\circ}{\overline{T(B(r/2))}} \neq \emptyset$. Pentru simplificarea scrierii să notăm mulţimea nevidă $\overset{\circ}{\overline{T(B(r/2))}}$ cu U. Să observăm că $U - U$ este o vecinătate deschisă a originii (deoarece $U - U = \bigcup_{u \in U}(u - U)$

şi $y \longmapsto u - y$ este un homeomorfism pe Y), deci există $\alpha_r > 0$ astfel încât $B(\alpha_r) \subset U - U$. Folosind faptul că aplicaţia din $Y \times Y$ în Y, $(y, z) \longmapsto y - z$ este continuă şi că T este liniar, au loc incluziunile

$$B(\alpha_r) \subset U - U = \overline{T(\overset{\circ}{B}(r/2))} - \overline{T(\overset{\circ}{B}(r/2))} \subset \overline{T(B(r/2))} - \overline{T(B(r/2))} \subset$$

$$\subset \overline{T(B(r/2)) - T(B(r/2))} = \overline{T(B(r/2) - B(r/2))} = \overline{T(B(r))},$$

fapt care încheie demonstraţia afirmaţiei.

Folosind pasul (1), vom justifica partea cea mai laborioasă a demonstraţiei teoremei:

(2) *Fie X, Y spaţii Banach şi T un operator liniar şi continuu, surjectiv definit pe X cu valori în Y. Atunci, $\forall r > 0$, $\exists\ \delta_r > 0$ astfel încât $B(\delta_r) \subset T(B(r))$.*

Fie $r > 0$. Pentru orice număr natural k, să notăm cu $r_k = r/2^{k+2}$. Folosind prima etapă, pentru orice k, există $\alpha_{r_k} > 0$ astfel încât $B(\alpha_{r_k}) \subset \overline{T(B(r_k))}$. Deoarece $T(B(r_k)) \subset B(\|T\| r_k)$, este clar că şirul $(\alpha_{r_k})_k$ converge la zero.

Vom arăta că $B(\alpha_{r_o}) \subset T(B(r))$, cu alte cuvinte că δ_r căutat poate fi chiar α_{r_o}. Să considerăm y arbitrar în $B(\alpha_{r_o}) \subset \overline{T(B(r_o))}$. Atunci, cum mulţimea $B(y, \alpha_{r_1}) \cap T(B(r_o))$ este nevidă, există $x_o \in B(r_o)$ cu $T(x_o) \in B(y, \alpha_{r_1})$. Prin urmare, elementul x_o are proprietăţile:

$$\|x_o\| < r_o \text{şi } y - T(x_o) \in B(\alpha_{r_1}) \subset \overline{T(B(r_1))}.$$

Mai departe, deoarece mulţimea $B(y - T(x_o), \alpha_{r_2}) \cap T(B(r_1))$ este nevidă, găsim $x_1 \in B(r_1)$ cu $T(x_1) \in B(y - T(x_o), \alpha_{r_2})$. Atunci, x_1 are proprietăţile:

$$\|x_1\| < r_1 \text{şi } y - T(x_o) - T(x_1) \in B(\alpha_{r_2}) \subset \overline{T(B(r_2))}.$$

Procedând inductiv, putem afirma că există şirul $(x_n)_n$ astfel încât

$$\|x_n\| < r_n \text{şi } \|y - \sum_{k=0}^{n} T(x_k)\| < \alpha_{r_{n+1}}.$$

În continuare, să definim pentru orice n natural,

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

şi să verificăm că şirul $(z_n)_n \subset X$ este Cauchy. Aceasta rezultă din

$$\|z_{n+p} - z_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{r}{2^{k+2}} = \frac{r}{4}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{r}{2^{n+2}}(1 - \frac{1}{2^p}) < \frac{r}{2^{n+2}}, \ \forall n, p \in N.$$

Cum spaţiul X este Banach, şirul $(z_n)_n$ are limită (unică) în X, pe care să o notăm cu x. Un simplu calcul,

$$\|x\| = \|\lim_n \sum_{k=0}^{n} x_k\| \leq \lim_n \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \leq \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{r}{2^{k+2}} = \lim_n \frac{r}{2}(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) = \frac{r}{2},$$

arată că $x \in B(r)$. Cum pentru orice n, $\|y - \sum_{k=0}^{n} T(x_k)\| < \alpha_{r_{n+1}}$, rezultă că $\|y - T(z_n)\| < \alpha_{r_{n+1}}$, $\forall n$. Atunci, folosind continuitatea operatorului T obţinem

$$\|y - T(\lim_n z_n)\| \leq \lim_n \alpha_{r_{n+1}}$$

ceea ce arată că $y = T(x)$, şi deci, $y \in T(B(r))$.

(3) *Demonstraţia teoremei* rezultă acum imediat, din etapa (2). Fie D o mulţime deschisă în X. Trebuie să demonstrăm că $T(D)$ este deschisă în Y, deci, că odată cu un punct, o întreagă bilă centrată în acel punt se află în $T(D)$. Fie y arbitrar în $T(D)$, prin urmare, există x în D, cu $y = T(x)$. Cum D este deschisă, ea conţine o bilă centrată în x şi de rază $r > 0$, $B(x, r) = x + B(r)$. Din pasul (2), rezultă că există $\delta = \delta_r > 0$ astfel încât $B(\delta) \subset T(B(r)$. Concludem că $T(x) + B(\delta) \subset T(x) + T(B(r)) = T(x + B(r)) = T(B(x, r)) = T(D)$.

În practică, Teorema aplicaţiei deschise, ca atare, se foloseşte mai rar, dar de o deosebită utilitate este următoarea teoremă, pe care o vom obţine ca o consecinţa a sa.

Teorema 3.13 (Teorema aplicaţiei inverse) *Orice aplicaţie liniară continuă, bijectivă între două spaţii Banach are inversa continuă.*

Demonstraţie. Fie $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, bijectivă. Trebuie să arătăm că $\forall D \subset X$, deschisă, $(T^{-1})^{-1}(D)$ este deschisă în Y. Cum $(T^{-1})^{-1}(D) = T(D), \forall D \subset X$, aceasta rezultă din Teorema aplicaţiei deschise.

Remarcăm, că, deoarece inversa unei aplicaţii liniare este în mod evident tot liniară, practic Teorema aplicaţiei inverse afirmă că dacă $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ este un operator bijectiv (unde X, Y sunt spaţii Banach), atunci, inversul său, $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.

3.5 Operatori închişi, Principiul graficului închis

Definiţie. Fie T o aplicaţie definită pe o submulţime D_T a unui spaţiu normat X cu valori în spaţiul normat Y. Se numeşte *graficul* aplicaţiei T, notat cu G_T, următoarea submulţime a produsului cartezian $X \times Y$:

$$G_T = \{(x, y) | (x, y) \in D_T \times Y,\ y = Tx\}.$$

Aplicaţia T se numeşte închisă dacă graficul său, G_T, este o submulţime închisă în spaţiul normat $X \times Y$.

Observaţie. *Ţinând cont că spaţiile normate sunt în definitiv spaţii metrice, este clar că aplicaţia* $T : D_T \subset X \longrightarrow Y$ *are graficul închis, dacă şi numai dacă pentru orice şir arbitrar* $(x_n)_n \subset D_T$ *cu* $x_n \longrightarrow x$ *şi* $T(x_n) \longrightarrow y$, când $n \to \infty$, *rezultă că* $x \in D_T$ *şi* $y = T(x)$.

Teorema 3.14 (Principiul graficului închis) *Fie X şi Y spaţii Banach şi T un operator liniar, definit pe X cu valori în Y. Atunci, T este mărginit dacă şi numai dacă T este închis.*

Demonstraţie. Să presupunem că G_T este submulţime închisă a spaţiului normat $X \times Y$. Din liniaritatea lui T rezultă că G_T este subspaţiu liniar al spaţiului $X \times Y$. Cum G_T este subspaţiu liniar închis în spaţiul Banach $X \times Y$, este el însuşi spaţiu Banach, cu norma indusă de norma din $X \times Y$. Să considerăm aplicaţiile liniare $P_1 : X \times Y \longrightarrow X$ şi $P_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ definite prin $P_1(x, y) = x$, respectiv $P_2(x, y) = y$. Din

$$\|P_1(x, y)\| = \|x\| \le \max(\|x\|, \|y\|) \text{şi } \|P_2(x, y)\| = \|y\| \le \max(\|x\|, \|y\|)$$

rezultă căP_1, P_2 sunt mărginite. Restricţia aplicaţiei P_1 la G_T este deci un operator liniar continuu bijectiv definit pe spaţiul Banach G_T cu valori în spaţiul Banach Y. Conform Teoremei aplicaţiei inverse, $P_1^{-1} : Y \longrightarrow G_T$ este un operator liniar şi continuu. Cum $T = P_2 \circ P_1^{-1}$, rezultă că T este mărginit. Implicaţia inversă este banală.

Observaţie. Ca să evităm orice confuzie, subliniem că aplicaţia T din teorema precedentă este definită pe un spaţiu Banach X. Se pot da exemple de operatori liniari închişi, care nu sunt mărginiţi (deci, domeniul (codomeniul) lor nu este spaţiu Banach).

Example. Fie X subspaţiul liniar al spaţiului l_K^2 ce conţine toate şirurile

$(\xi_n)_n \in l^2_K$ cu proprietatea $\sum_{n\geq 1} n^2|\xi_n|^2 < \infty$ şi $T : X \longrightarrow l^2_K$ operatorul liniar definit prin $T((\xi_n)_n) = (n\xi_n)_n$. Graficul aplicaţiei T este închis. Să verificăm aceasta. Fie $(x_n)_n \subset X$, $x_n = (\xi_k^{(n)})_k$ cu $x_n \longrightarrow x$, $x = (\xi_k)_k$ şi $T(x_n) \longrightarrow y$, când $n \to \infty$. Deoarece $(T(x_n))_n$ este convergent în l^2_K , el este un şir mărginit, deci $\exists \alpha > 0$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{l} k^2|\xi_k^{(n)}|^2 \leq \alpha^2, \ \forall n \in N, \ \forall l \in N.$$

Fie $l \in N$ arbitrar fixat. Cum, $\forall k \in N$,

$$\lim_n \xi_k^{(n)} = \xi_k,$$

rezultă că

$$\lim_n \sum_{k=1}^{l} k^2|\xi_k^{(n)}|^2 \leq \alpha^2, \ \text{deci} \ \sum_{k=1}^{l} k^2|\xi_k|^2 \leq \alpha^2$$

Am dovedit că $x \in X$.

Mai departe, deoarece $(T(x_n))_n$ este şir Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$, există n_ε natural astfel încât $\forall m, n \geq n_\varepsilon$ avem $\|T(x_n) - T(x_m)\| < \varepsilon/2$, adică

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Atunci, fixând l şi $n \geq n_\varepsilon$ arbitrari,

$$\sum_{k=1}^{l} k^2|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4},$$

de unde, pentru $m \to \infty$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2|\xi_k^{(n)} - \xi_k|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Deci, $\|T(x_n) - T(x)\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$. Din unicitatea limitei, rezultă că $T(x) = y$. Tocmai am arătat că T este un operator închis.

Operatorul liniar T nu este mărginit, deoarece şirul $(e_n)_n \subset X$, $e_n = (\delta_k^{(n)})_k$, are proprietatea că $\|e_n\| = 1$, $\forall n$ şi, pe de altă parte, $\|Te_n\| = n$, $\forall n$.

Aceasta se întâmplă, deoarece spaţiul X pe care este definit T nu este spaţiu Banach.

3.6 Operatori compacţi

În această secţiune vom studia o clasă specială de operatori liniari şi mărginiţi, anume operatorii compacţi. În continuare X şi Y sunt spaţii normate.

Definiţie. Un operator liniar T definit pe X cu valori în Y se numeşte operator *compact* dacă imaginea oricărei mulţimi mărginite din X prin T este relativ compactă în Y.

Observaţie. *Ţinând cont de caracterizarea mulţimilor compacte în spaţii metrice, putem reformula definiţia de mai sus astfel: un operator liniar $T : X \to Y$ este compact dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul mărginit $(x_n)_n$ din X, şirul $(Tx_n)_n$ conţine un subşir convergent (în Y). Prin urmare, pentru a dovedi că un operator liniar T este compact este suficient să verificăm că dacă $(x_n)_n$ este un şir în X, cu $\|x_n\| \leq 1$, şirul $(Tx_n)_n$ conţine un subşir convergent în Y.*

Exemple. 1. Fie T în $\mathcal{B}(X,Y)$,operator de rang finit (adică subspaţiul liniar $T(X) \subset Y$ este finit dimensional). Atunci T este compact. (În particular, orice operator liniar şi continuu definit pe un spaţiu liniar normat oarecare cu valori într-un spaţiu normat finit dimensional este compact). Într-adevăr, dacă $(x_n)_n$ este un şir din X, cu $\|x_n\| \leq 1$, şirul $(Tx_n)_n$ este un şir mărginit într-un spaţiu finit dimensional, deci, conform Teoremei 2.8, conţine un subşir convergent.

2. Operatorul integral, $T : \mathcal{C}_K([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}_K([0,1])$,

$$(Tx)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{C}_K([0,1]),$$

unde $k \in \mathcal{C}_K([0,1] \times [0,1])$, este compact.

Fie A mulţime mărginită în $\mathcal{C}_K([0,1])$, adică există $\alpha > 0$ astfel încât $\|x\| \leq \alpha$, $\forall x \in A$. Arătăm că $T(A)$ este relativ compactă în $\mathcal{C}_K([0,1])$, deci, conform Teoremei lui Ascoli că $T(A)$ este uniform mărginită şi echicontinuă. Avem,

$$|Tx(s)| \leq \int_0^1 |k(s,t)| \cdot |x(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|x\| \cdot \int_0^1 |k(s,t)|.$$

Prin urmare, cum A este mărginită şi $\sup\limits_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, $T(A)$ este mărginită.

Să dovedim că $T(A)$ este echicontinuă în orice punct $s_o \in [0,1]$. Cum $k : [0,1] \times [0,1]$ este uniform continuă, rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|s-s'| < \delta_\varepsilon$ şi $|t-t'| < \delta_\varepsilon$ implică $|k(s,t)-k(s',t')| < \varepsilon/2\alpha$. Atunci, dacă $|s - s_o| < \delta_\varepsilon$,

$$|Tx(s) - Tx(s_o)| \leq \int_0^1 |k(s,t) - k(s_o,t)| \cdot |x(t)| \, \mathrm{dt} \leq \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} < \varepsilon, \ \forall x \in A.$$

3. Operatorul identitate I definit pe un spaţiu normat infinit dimensional X nu este compact. Să presupunem că I ar fi compact. Atunci, bila unitate în X, fiind imaginea ei însăşi prin I (deci a unei mulţimi mărginite) este relativ compactă, ceea ce contrazice Corolarul 2.9.

Notaţie. Mai departe, mulţimea operatorilor compacţi definiţi pe X cu valori în Y va fi notată cu $\mathcal{K}(X,Y)$. Pentru $\mathcal{K}(X,X)$ vom scrie, în mod natural, $\mathcal{K}(X)$.

Propoziţia 3.15 *1) $K(X,Y)$ este un subspaţiu liniar al spaţiului $B(X,Y)$.*
2) Dacă $S \in K(X)$ şi $T \in B(X)$, operatorii ST şi TS sunt compacţi.

Demonstraţie. 1) Conform definiţiei, este clar că orice operator compact este mărginit, deci $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Fie $S, T \in \mathcal{K}(X,Y)$, şi $(x_n)_n$ un şir în X, $\|x_n\| \leq 1$. Atunci, $(Sx_n)_n$ conţine un subşir convergent, fie acesta $(Sx_{n'})_{n'}$. Cum T este compact, din şirul $(Tx_{n'})_{n'}$ putem extrage un subşir convergent, $(Tx_{n''})_{n''}$. Atunci $((S+T)x_{n''})_{n''}$ converge, deci $S+T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Faptul că $\forall \alpha \in K$ şi $\forall T \in \mathcal{K}(X,Y)$, $\alpha T \in \mathcal{K}(X,Y)$ este imediat.

2) Dacă $(x_n)_n$ este un şir în X, $\|x_n\| \leq 1$, şirul $(Tx_n)_n$ este mărginit, deoarece T este mărginit. Cum S este compact, rezultă că şirul $(STx_n)_n$ conţine un subşir convergent, adică ST este compact.

Să arătăm acum că TS este în $\mathcal{K}(X,Y)$. Fie $(x_n)_n \subset X$, $\|x_n\| \leq 1$. Şirul $(Sx_n)_n$ are un subşir convergent, $(Sx_{n'})_{n'}$. Deci, cu continuitatea lui T, rezultă că $(TSx_{n'})_{n'}$ converge.

Observaţie. Este bine să remarcăm că, ţinând cont de Exemplul 1, putem concluziona că dacă Y este spaţiu normat finit dimensional, $\mathcal{K}(X,Y)$ coincide cu $\mathcal{B}(X,Y)$. În particular, $\mathcal{L}(K^n) = \mathcal{B}(K^n) = \mathcal{K}(K^n)$.

Teorema următoare este foarte utilă pentru a stabili dacă anumiţi operatori sunt compacţi, pe baza ei fiind posibil de pus în evidenţa exemple importante de operatori compacţi.

Teorema 3.16 *Dacă Y este spaţiu Banach, $K(X,Y)$ este subspaţiu liniar închis al spaţiului $(B(X,Y), \|\cdot\|)$.*

Demonstraţie. Fie $(T_n)_n$ un şir de operatori compacţi care converge în $\mathcal{B}(X,Y)$ la T şi $(x_n)_n$ un şir din X, $\|x_n\| \leq 1$. Ca să arătăm că $(Tx_n)_n$ conţine un subşir convergent, vom proceda prin diagonalizare, după cum urmează: T_1 fiind compact, există $(x_{1n})_n$ subşir al şirului $(x_n)_n$ astfel încât $(T_1 x_{1n})_n$ converge; T_2 fiind şi el compact, există $(x_{2n})_n$ subşir al şirului $(x_{1n})_n$ astfel încât $(T_2 x_{2n})_n$ converge. Continuând în acest mod, obţinem pentru orice întreg $k \geq 2$, un subşir $(x_{kn})_n$ al şirului $(x_{(k-1)n})_n$ astfel încât $(T_k x_{kn})_n$ converge. Vom demonstra că şirul "diagonal" $(Tx_{nn})_n$ converge şi, cu aceasta, că T este compact. Pentru simplificarea scrierii, să notăm $v_n = x_{nn}$, $\forall n$.

Pentru j, l, $n \in N$ arbitrari, avem:

$$\|Tv_j - Tv_l\| \leq \|Tv_j - T_n v_j\| + \|T_n v_j - T_n v_l\| + \|T_n v_l - Tv_l\|.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $(T_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T, \exists n_\varepsilon \in N$ astfel încât $\|T_{n_\varepsilon} - T\| < \varepsilon/3$. Ştim însă că $(T_{n_\varepsilon} v_j)_j$ este convergent, deci $\exists j_\varepsilon \in N$ astfel încât $\|T_{n_\varepsilon} v_j - T_{n_\varepsilon} v_l\| < \varepsilon/3$, $\forall j, l \geq j_\varepsilon$. Prin urmare, $\forall j, l \geq j_\varepsilon$,

$$\|Tv_j - Tv_l\| \leq 2\|T - T_{n_\varepsilon}\| + \|T_{n_\varepsilon} v_j - T_{n_\varepsilon} v_l\| < \varepsilon.$$

Exemplu. Să considerăm operatorul din $\mathcal{B}(l^p_{\mathbf{K}})$ prezentat în Exemplul 2 (Capitolul 3), anume operatorul diagonal definit de şirul $(\lambda_n)_n$ din $l^\infty_{\mathbf{K}}$. Cu teorema de mai sus, arătăm că dacă $\lambda_n \to 0$, atunci T este compact. Întradevăr, să considerăm pe $l^p_{\mathbf{K}}$ şirul de operatori $(T_m)_m$, T_m, pentru fiecare $m \in N$, fiind definit astfel:

$$T_m(\xi_n)_n = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, ... \lambda_m \xi_m, 0, 0, ...).$$

Este clar că fiecare operator T_m este de rang finit, deci compact. Cum

$$\|T_m - T\| = \sup_{n \geq m+1} |\lambda_n|$$

şi şirul $(\lambda_n)_n$ converge la zero, rezultă că operatorul T, fiind limita în $\mathcal{B}(l^p_{\mathbf{K}})$ a unui şir de operatori compacţi, este el însuşi compact.

De remarcat, că şi reciproca acestui rezultat este adevărată: cu alte cuvinte, dacă T este compact, atunci şirul $(\lambda_n)_n$ converge la zero.

Capitolul 4

Operatori liniari şi continui pe spaţii Hilbert

Studiul operatorilor pe spaţii Hilbert duce la obţinerea unor rezultate mult mai bogate decât cele obţinute deja în capitolul precedent (spaţiile Hilbert sunt spaţii Banach, dar faptul că norma este generată de un produs scalar conduce după cum am văzut şi în Capitolul 3 la proprietăţi specifice).

4.1 Funcţionale liniare şi continue pe spaţii Hilbert, Lema lui Riesz

Începem cu Lema lui Riesz, privind forma funcţionalelor liniare şi continue pe spaţii Hilbert, teoremă care descrie dualul unui spaţiu Hilbert.

Teorema 4.1 (Lema lui Riesz) *Fie X spaţiu Hilbert şi f o funcţională liniară şi continuă pe X ($f \in X^*$). Atunci:*
1) Există un element a_f în X astfel încât $f(x) = < x, a_f >$, $\forall x \in X$.
2) Elementul a_f este unic cuproprietatea 1).
3) $\|f\| = \|a_f\|$.

Demonstraţie. Pentru $f \in X^*$, nucleul său, Ker f este un subspaţiu închis al lui X. Dacă Ker $f = X$, deci $f \equiv 0$ luăm $a_f = 0$. Să presupunem că Ker $f \neq X$, prin urmare, conform Corolarului 2.20, $\exists z \neq 0$, $z \in$ Ker $f^\perp$. Pentru $x \in X$ arbitrar, elementul

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in \text{Ker } f$$

şi, deci
$$< x - \frac{f(x)}{f(z)}z, z >= 0.$$
Rezultă că
$$< x, z > -\frac{f(x)}{f(z)}\|z\|^2 = 0, \text{ sau, echivalent, } f(x) =< x, \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}z > .$$
Punând
$$a_f = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}z$$
punctul 1) este demonstrat. Unicitatea este imediată (2)). 3) rezultă ţinând cont de
$$|f(x)| = |< x, a_f >| \le \|x\| \cdot \|a_f\| \Rightarrow \|f\| \le \|a_f\|$$
şi de
$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \ge f(\frac{1}{\|a_f\|}a_f) = \|a_f\|.$$

Observaţie. Notăm că folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă imediat că reciproca teoremei demonstrate mai sus este de asemenea adevărată. Mai precis, orice $y \in X$ defineşte o funcţională liniară şi continuă f_y pe X, $f_y(x) =< x, y >$.

4.2 Corespondenţa între forme seschiliniare şi operatori

Corespondenţa între forme seschiliniare şi operatori liniari pe spaţii Hilbert, pe lângă faptul că reprezintă un instrument de lucru util în multe situaţii (de exemplu, poate fi folosit pentru definirea adjunctului şi evidenţierea proprietăţilor sale), este de un interes istoric deosebit. Amintim că teoria spectrală a fost dezvoltată de Hilbert (la începutul secolului trecut) ca o teorie pentru forme biliniare pătratice, context în care, lucrând cu expresia formelor ca matrici infinite, se ajungea la calcule foarte complicate. Unul (dar nu unicul) dintre motivele pentru care von Neumann a devenit faimos este şi folosirea conceptului de operator liniar pentru soluţionarea problemelor teoriei spectrale pe spaţii Hilbert.

Să precizăm mai întâi câteva noţiuni.

Definiţie. Se numeşte *formă seschiliniară* pe spaţiul liniar X peste corpul K o aplicaţie $B : X \times X \longrightarrow K$ liniară în prima variabilă şi conjugat liniară în a doua, adică, având proprietăţile:

i) $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$, $\forall x,\ y,\ z \in X$, $\alpha,\ \beta \in K$;

ii) $B(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} B(x, y) + \overline{\beta} B(x, z)$, $\forall\ x,\ y,\ z \in X$, $\alpha,\ \beta \in K$.

Spunem că forma seschiliniară B este *autoadjunctă* (sau *hermitiană*) dacă $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$, $\forall x, y \in X$, şi este *pozitivă* dacă $B(x, x) \geq 0$, $\forall x \in X$.

Observaţie. Un produs scalar pe X este o formă seschiliniară pozitivă, autoadjunctă, care în plus mai are proprietatea că dacă $B(x, x) = 0$ atunci $x = 0$ ($x \in X$).

Observaţie. Dacă B este o formă pozitivă, autoadjunctă pe X, atunci

$$0 \leq B(\lambda x+y, \lambda x+y) = |\lambda|^2 B(x, x)+2Re\lambda\, B(x, y)+B(y, y),\ \forall x, y \in X, \lambda \in K.$$

Prin urmare, dacă $B(x, x) \neq 0$ (sau $B(y, y) \neq 0$) punând aici

$$\lambda = \frac{\overline{B(x, y)}}{B(x, x)},$$

obţinem *inegalitatea Cauchy-Schwarz generalizată*,

$$|B(x, y)| \leq B(x, x)^{\frac{1}{2}} B(y, y)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x, y \in X.$$

Când ambii $B(x, x)$ şi $B(y, y)$ sunt zero, inegalitatea se obţine luând $\lambda = -\overline{B(x, y)}$.

În continuare presupunem că $(X, < \cdot, \cdot >)$ este spaţiu Hilbert.

Definiţie. O forma seschiliniară pe spaţiul Hilbert X se numeşte mărginită dacă există o constată pozitivă $M > 0$ astfel încât

$$|B(x, y)| \leq M\ \|x\|\ \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Notaţie. Observăm că mulţimea tuturor formelor seschiliniare mărginite pe X echipată cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari uzuale este un spaţiu liniar, notat în cele ce urmează cu $\mathcal{SB}(X)$. Aplicaţia definită pe $\mathcal{SB}(X)$ cu valori reale,

$$B \mapsto \|B\| = \inf\ \{M > 0 \mid |B(x, y)| \leq M\ \|x\|\ \|y\|, \forall x, y \in X\},$$

este o normă pe $\mathcal{SB}(X)$. Un calcul simplu arată că

$$\|B\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |B(x,y)| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |B(x,y)| = \sup_{\|x\|\neq 0, \|y\|\neq 0} \frac{|B(x,y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Propoziţia 4.2 *Există o corespondenţă bijectivă, izometrică între operatorii din $B(X)$ şi formele din $SB(X)$, dată de $T \longmapsto B_T$, unde*

$$B_T(x,y) = < x, Ty >, \quad \forall x, y \in X.$$

Demonstraţie. Dacă $T \in \mathcal{B}(X)$, este clar că B_T este o formă seschiliniară pe X. Mărginirea lui B_T rezultă din

$$|B_T(x,y)| = | < x, Ty > | \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \;, \quad \forall x, y \in X$$

şi, în plus, $\|B_T\| \leq \|T\|$. Pe de altă parte, punând $x \rightsquigarrow Ty$ în definiţia formei B_T obţinem

$$\|Ty\|^2 = |B_T(Ty, y)| \leq \|B_T\| \cdot \|Ty\| \cdot \|y\|$$

ceea ce arată că $\|B_T\| \leq \|T\|$. Rezultă că $\|B_T\| = \|T\|$.

Mai avem de demonstrat că aplicaţia $T \mapsto B_T$ este surjectivă. Pentru B în $\mathcal{SB}(X)$ şi $y \in X$ să considerăm funcţionala pe X, definită prin

$$f_y^B(x) = B(x,y), \; x \in X,$$

care, în mod evident este în X^*. Aplicând Lema lui Riesz, obţinem un element unic în X, Ty, astfel încât

$$f_y^B(x) = < x, Ty >, \; \forall x \in X \text{şi } \|f_y^B\| = \|Ty\|.$$

Aplicaţia $y \longmapsto Ty$ este liniară aşa cum rezultă din

$$< z, T(\alpha x + \beta y) > = f_{\alpha x + \beta y}^B(z) = B(x, \alpha x + \beta y)$$

$$= \overline{\alpha} B(z,x) + \overline{\beta} B(z,y) = \overline{\alpha} < z, Tx > + \overline{\beta} < z, Ty >$$

$$= < z, \alpha Tx + \beta Ty > \; \forall x, \; y, \; z \in X, \; \alpha, \; \beta \in K.$$

Mai mult,

$$\|Ty\| = \|f_y^B\| = \sup_{\|x\|=1} |B(x,y)| \leq \|B\| \cdot \|y\|,$$

deci T este operator mărginit. Cum $B(x,y) =< x, Ty >, \forall x, y \in X$, propoziţia este demonstrată.

Corolarul 4.3 *Fie T un operator liniar pe X. Operatorul T este mărginit dacă şi numai dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât*

$$| < x, Ty > | \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in X.$$

În plus,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} | < x, Ty > | = \sup_{\|x\|\neq 0, \|y\|\neq 0} \frac{| < x, Ty > |}{\|x\| \cdot \|y\|} =$$

$$= \inf \{M > 0 \mid | < x, Ty > | \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in X\}$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din echivalenţa $T \in \mathcal{B}(X) \Leftrightarrow B_T \in \mathcal{SB}(X)$.

Observaţie. Deoarece $| < y, Tx > | = |\overline{< Tx, y >}| = | < Tx, y > |$, corolarul precedent poate fi reformulat astfel: $T \in \mathcal{B}(X) \Leftrightarrow \exists M > 0$ astfel încât $| < Tx, y > | \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

4.3 Adjunctul unui operator şi proprietăţile sale

Teorema 4.4 *Pentru orice operator $T \in B(X)$ există un unic operator $T^* \in B(X)$ astfel încât*

$$< Tx, y >=< x, T^*y >, \quad \forall x, y \in X.$$

În plus, $\|T\| = \|T^*\|$.

Demonstraţie. Pentru T arbitrar în $\mathcal{B}(X)$ considerăm forma seschiliniară

$$(x, y) \stackrel{B}{\longmapsto} < Tx, y >$$

care, aparţine în mod evident spaţiului $\mathcal{SB}(X)$. Conform Propoziţiei 4.2, rezultă că există un operator $T^* \in \mathcal{B}(X)$ astfel încât $B_{T^*} = B$, adică

$$< Tx, y >=< x, T^*y >, \ \forall x, y \in X.$$

Mai mult, $\|B_{T^*}\| = \|T^*\|$ şi, pe de altă parte

$$\|B_{T^*}\| = \inf \{M > 0 \mid |B_{T^*}(x, y)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in X\} =$$

$$= \inf \{M > 0 \mid |(Tx, y)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in X\} =$$

$$= \inf \{M > 0 \mid |(x, Ty)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in X\} = \|T\|.$$

Definiţie. Operatorul $T^* \in \mathcal{B}(X)$ având proprietatea

$$< Tx, y > = < x, T^*y > \quad \forall x, y \in X,$$

se numeşte *adjunctul* operatorului T. Spunem că operatorul T este *autoadjunct* dacă $T = T^*$.

Mulţimea operatorilor autoadjuncţi pe spaţiul Hilbert X va fi notată în cele ce urmează cu $\mathcal{A}(X)$. .

Observaţie. *Dacă A este autodjunct, este uşor de văzut că pentru orice $x \in X$, $< Ax, x > \in R$. Mai mult $< Ax, x > \in [-\|A\|, \|A\|]$, $\forall x \in X$ cu $\|x\| \leq 1$.*

Notaţii. Pentru A operator autoadjunct, notăm

$$m_A = \inf_{\|x\| \leq 1} < Ax, x > \text{ şi } M_A = \sup_{\|x\| \leq 1} < Ax, x > .$$

Exemple. 1. Fie $T \in \mathcal{B}(K^n), (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ şi respectiv $(a^*_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matricea operatorului T, respectiv a adjunctului său, T^* în baza canonică. Cum $\forall i, j$,

$$a_{ij} = < T(e_j), e_i > = < e_j, T^*(e_i) > = \overline{< T^*(e_i), e_j >} = \overline{a^*_{ji}},$$

rezultă că $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$, deci matricea lui T^* este adjuncta matricii lui T.

Notăm că terminologia introdusă în definiţia de mai sus este aceeaşi cu cea utilizată în algebra liniară. Deci, T este autoadjunct dacă matricea sa este hermitiană.

2. Fie T operatorul definit pe l^2_K, prin $T((\xi_n)_n) = (\lambda_n \xi_n)_n$, $(\xi_n)_n \in l^2_K$, (unde $(\lambda_n)_n \in l^\infty_K$).

În Exemplul 2 din secţiunea 3.1, am stabilit că T este bine definit şi că $T \in \mathcal{B}(l^2_K)$. Adjunctul lui T este definit astfel:

$$T^*((\xi_n)_n) = (\overline{\lambda_n} \xi_n)_n, \ \forall (\xi_n)_n \in l^2_K.$$

Într-adevăr, pentru $e_n = (\delta^{(n)}_k)_k$ avem

$$< Te_n, e_n > = < \lambda_n e_n, e_n > = < e_n, \overline{\lambda_n} e_n >,$$

deci $T^*(e_n) = \overline{\lambda_n} e_n$. Atunci,

$$T^*((\xi_n)_n) = T^*(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n T^* e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \xi_n e_n = (\overline{\lambda_n} \xi_n)_n$$

Operatorul T este autoadjunct dacă şi numai dacă $(\lambda_n)_n \subset R$.

3. Dacă $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$este o matrice infinită cu proprietatea $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < < \infty$, să definim pe l_K^2 operatorul A,

$$A(\xi_i)_i = (\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j)_i, \ \forall (\xi_i)_i \in l_K^2.$$

Deoarece

$$|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot |\xi_j| \leq (\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

rezultă că

$$\|A(\xi_i)_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right) \|(\xi_i)_i\|^2,$$

deci $A \in \mathcal{B}(l_K^2)$ şi

$$\|A\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$$

Să notăm că $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$ nu este o condiţie necesară pentru că A să fie mărginit (de exemplu matricea identitate nu satisface această condiţie, dar operatorul A definit de ea este operatorul identitate, I, care este continuu).

Considerând în l_K^2 baza ortonormală standard, $e_1, e_2, ..., e_n, ...$,

$$a_{ij} = < Ae_j, e_i > .$$

Deoarece

$$< A^* e_j, e_i > = < e_j, Ae_i > = \overline{a_{ji}} \text{şi} \ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\overline{a_{ji}}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2,$$

rezultă că adjunctul operatorului A, este operatorul definit de matricea infinită $(\overline{a_{ji}})_{i,j=1}^{\infty}$.

Să notăm că operatorul A este compact. Pentru a justifica aceasta, să considerăm pentru fiecare $n \in N$, operatorul A_n pe l_K^2 , definit prin

$$A_n(\xi_i)_i = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\xi_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\xi_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\xi_j, 0, 0...., 0, ..), \ \forall (\xi_i)_i \in l_K^2.$$

Deoarece A_n este de rang finit, el este compact. Totodată,

$$\|A - A_n\|^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \to 0$$

deci, conform Teoremei 3.16, $A \in \mathcal{K}(l_K^2)$.

Teorema 4.5 (Proprietăţile adjunctului) *Fie $T, V \in B(X)$ şi $\alpha, \beta \in K$. Atunci:*

1) $(\alpha T + \beta V)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} V^*$;
2) $(T\ V)^* = V^* T^*$;
3) $T^{**} = T$;
4) $\|T^* T\| = \|T\|^2$;
5) T este inversabil în $B(X)$ dacă şi numai dacă T^* este inversabil în $B(X)$; în plus $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$;
6) Ker $T^* = (T(X))^{\perp}$.
7) $T \in \mathcal{K}(X)$ dacă şi numai dacă $T^* \in \mathcal{K}(X)$.

Demonstraţie. Pentru a demonstra primele trei proprietăţi vom folosi corespondenţa dintre forme seschiliniare mărginite şi operatori liniari şi continui pe X. Avem

$$B_{(\alpha T + \beta V)^*}(x, y) =< x, (\alpha T + \beta V)^* y >=$$
$$=< (\alpha T + \beta V)x, y >= \alpha < Tx, y > + \beta < Vx, y >=$$
$$=< x, \overline{\alpha} T^* y > + < x, \overline{\beta} V^* y >= B_{(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} V^*)}(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

deci 1) este justificătă. Pentru 2), ţinem cont de

$$B_{(TV)^*}(x, y) =< x, (TV)^* y >=< (TV)y, x >=$$

$$=< V(x), T^* y >=< x, V^* T^* y >= B_{V^* T^*}(y), \quad \forall x, y \in X.$$

A treia proprietate rezultă din

$$B_{T^{**}}(x, y) =< x, ((T)^*)^* y >=< T^* x, y >= \overline{< y, T^* x >} =$$

$$= \overline{< Ty, x >} =< x, Ty >= B_T(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Să dovedim acum 4). Clar,

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$$

Pe de altă parte, pentru fiecare $y \in Y$,

$$\|Ty\|^2 =< Ty, Ty >=< y, T^*Ty >\leq \|T^*T\| \cdot \|y\|^2,$$

deci $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

T este inversabil în $\mathcal{B}(X)$ dacă există în $\mathcal{B}(X)$ un operator, (notat cu T^{-1}) astfel încât $T\ T^{-1} = I$, $T^{-1}T = I$. Prin urmare, folosind 2), rezultă

$$(T^{-1})^*T^* = I,\ T^*(T^{-1})^* = I.$$

Aceste egalităţi demonstrează că operatorul T^*este inversabil şi că inversul său este ($T^{-1})^*$. Cum $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, avem că $(T^{-1})^* \in \mathcal{B}(X)$.

Pentru 5), din identitatea $< Tx, y >=< x, T^*y >$ rezultă că dacă $y \in$ Ker T^*, atunci $y \in (T(X))^{\perp}$. Reciproc, dacă $y \in (T(X))^{\perp}$, atunci $T^*y \in X^{\perp} = \{0\}$.

7) Să presupunem că T este compact. Fie $(x_n)_n$ un şir în X, $\|x_n\| \leq 1$. Deoarece, TT^* este compact (Propoziţia 3.15), există un subşir $(x_{n'})_{n'}$ al şirului $(x_n)_n$ astfel încât $(TT^*x_{n'})_{n'}$ converge. Atunci, pentru $n', m' \in N$ arbitrari,

$$\|T^*x_{n'} - T^*x_{m'}\| =< T^*(x_{n'} - x_{m'}), T^*x_{n'} - x_{m'} >\leq< TT^*(x_{n'} - x_{m'}), x_{n'} - x_{m'}$$

$$\leq \|TT^*(x_{n'} - x_{m'})\| \cdot \|x_{n'} - x_{m'}\| \leq 2\|TT^*x_{n'} - TT^*x_{m'}\|,$$

ceea ce înseamnă că şirul $(T^*x_{n'})_{n'}$ este Cauchy, deci X fiind complet, convergent.

4.4 Raza numerică

Definiţie. Se numeşte *raza numerică* a operatorului $T \in \mathcal{B}(X)$ numărul

$$|||T||| = \sup_{\|x\|=1} | < Tx, x > |.$$

Observaţie. Se poate arăta cu uşurinţă că avem următoarele egalităţi:

$$|||T||| = \sup_{\|x\|\leq 1} |< Tx, x >| = \sup_{x\neq 0} \frac{|< Tx, x >|}{\|x\|^2}.$$

Teorema 4.6 *Fie X spaţiu Hilbert complex. Atunci,*
1) Aplicaţia $T \longmapsto |||T|||$ definită pe $B(X)$ cu valori reale este o normă;
2) Pentru orice $T \in B(X)$, $(1/2)\|T\| \leq |||T||| \leq \|T\|$;
3) Pentru orice $T \in B(X)$, $|||T^2||| \leq |||T|||^2$.
Demonstraţie. Mai întâi vom demonstra punctul 2). Cu inegalitatea Cauchy-Schwarz avem

$$|< Tx, x >| \leq \|Tx\| \cdot \|x\|,$$

deci $|< Tx, x >| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2$, ceea ce implică $|||T||| \leq \|T\|$.

Ca să obţinem că $\|T\|$ este dominată de $2|||T|||$, pornim de la identitatea

$$< T(x+y), x+y > - < T(x-y), x-y >=$$

$$= 2 < Tx, y > +2 < Ty, x >, \ \ x, y \in X.$$

Pentru x şi y de normă unitară, folosind identitatea de mai sus şi Identitatea paralelogramului, se obţine

$$2|< Tx, y > + < Ty, x >| \leq |||T|||(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) =$$

$$= 2|||T|||(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4|||T|||.$$

Prin urmare, $\mathrm{Re}(< Tx, y > + < Ty, x >) \leq 2|||T|||$. Punând aici $y \rightsquigarrow (1/\|Tx\|)Tx$, avem

$$(*) \quad \|Tx\| + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\|Tx\|} < T^2x, x > \leq 2|||T|||, \ \forall x \in X, \ \|x\| = 1$$

Mai departe, dacă $|< T^2x, x >| = e^{i\theta} < T^2x, x >$, $\exists \gamma \in C$ astfel încât $\gamma^2 = e^{i\theta}$. Cum inegalitatea precedentă are loc pentru orice $T \in \mathcal{B}(X)$, ea este adevărată şi pentru $T \rightsquigarrow \gamma T$, deci

$$\|Tx\| + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\|Tx\|} < \gamma^2 T^2 x, x > \leq 2|||T|||, \ \forall x \in X, \ \|x\| = 1.$$

Am obţinut că

$$\|Tx\| + \frac{1}{\|Tx\|}|< T^2x, x >| \leq 2|||T|||, \ \forall x \in X, \ \|x\| = 1,$$

ceea ce implică $\|Tx\| \leq 2|||T|||$, $\forall x \in X, \|x\| = 1$, deci $\|T\| \leq 2|||T|||$.

Acum, 1) este clar, deoarece în mod evident $T \longmapsto |||T|||$ este o seminormă şi dacă $|||T||| = 0$, din 2), $\|T\| = 0$, deci $T = 0$.

Ca să dovedim 3) observăm că

$$\|Tx\| + \frac{1}{\|Tx\|}| < T^2x, x > | \leq 2|||T||| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq 2|||T||| \cdot \|Tx\| - \|Tx\|^2 - | < T^2x, x > |$$

Continuând calculul în membrul drept, avem,

$$0 \leq -(|||T||| - \|Tx\|)^2 + |||T|||^2 - | < T^2x, x > | \leq$$

$$\leq |||T|||^2 - | < T^2x, x > |, \ \forall x \in X, \ \|x\| = 1$$

ceea ce implică

$$| < T^2x, x > | \leq |||T|||^2, \ \forall x \in X, \ \|x\| = 1$$

şi încheie demonstraţia.

Corolarul 4.7 *Fie X spaţiu Hilbert peste corpul K (K =R, C) şi A operator autoadjunct pe X. Atunci, $\|A\| = |||A|||$.*

Mai mult $\|A\| = \max\{|m_A|, |M_A|\}$.

Demonstraţie. Egalitatea $(*)$ din demonstraţia teoremei precedente are loc pentru orice $T \in \mathcal{B}(X)$. Punând aici $T \rightsquigarrow A$, avem,

$$\|Ax\| + \frac{1}{\|Ax\|}| < A^2x, x > | \leq 2|||A|||, \ \forall x \in X, \ \|x\| = 1,$$

şi cum $A = A^*$, rezultă $\|Ax\| + \|Ax\| \leq 2|||A|||$, deci $\|A\| \leq |||A|||$. Aceasta, împreună cu punctul 2) din Teorema 4.6 arată că $\|A\| = |||A|||$.

Corolarul 4.8 *Fie X spaţiu Hilbert peste corpul K (K =R, C) şi A operator autoadjunct pe X astfel încât $< Ax, x >= 0$, $\forall x \in X$. Atunci $A = 0$.*

Demonstraţie. Dacă $< Ax, x >= 0$, $\forall x \in X$ rezultă că $|||A||| = 0$, deci $\|A\| = 0$.

4.5 Câteva clase de operatori în spaţii Hilbert

4.5.1 Operatori pozitivi, rădăcina pătrată a unui operator pozitiv

Definiţie. Spunem că operatorul $A \in \mathcal{A}(X)$ este *pozitiv* ($A \geq 0$) dacă $< Ax, x > \geq 0$, $\forall x \in X$.
Mulţimea tuturor operatorilor pozitivi pe un spaţiu Hilbert X va fi notată cu $\mathcal{A}_+(X)$.

Observaţii. 1. Pentru orice $T \in B(X)$ operatorii TT^* şi T^*T sunt pozitivi, deoarece

$$< TT^*x, x > = < T^*x, T^*x > = \|T^*x\|^2 \text{şi} \;\; < T^*Tx, x > = < Tx, Tx > = \|Tx\|^2.$$

2. Dacă A, B sunt în $\mathcal{A}_+(X)$, suma lor, $A + B$ este de asemenea în $\mathcal{A}_+(X)$.

3. Dacă $A \in \mathcal{A}_+(X)$ şi $t \geq 0$, atunci $tA \in \mathcal{A}_+(X)$.

4. Dacă şi A şi $-A$ sunt operatori pozitivi, atunci $A = 0$. Într-adevăr, dacă A şi $-A$ sunt în $\mathcal{A}_+(X)$, $< Ax, x > = 0, \forall x \in X$, deci $|||A||| = 0$, şi cum $|||A||| = \|A\|$, rezultă $A = 0$.

5. Pe mulţimea $\mathcal{A}(X)$ vom considera relaţia de ordine parţială

$$A_1 \leq A_2 \Longleftrightarrow A_2 - A_1 \in \mathcal{A}_+(X).$$

$(\mathcal{A}(X), \leq)$ este deci o mulţime parţial ordonată. Notăm că dacă $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_+(X)$, şi $A_1 \leq A_2$ atunci $\|A_1\| \leq \|A_2\|$. Aceasta rezultă din

$$A_1 \leq A_2 \Longleftrightarrow < A_1x, x > \leq < A_2x, x >, \forall x \in X \Longleftrightarrow |||A_1||| \leq |||A_2|||.$$

6. Pentru fiecare $A \in \mathcal{A}_+(X)$, forma seschiliniară asociată lui A (Propoziţia 4.2) este pozitivă şi autoadjunctă, deci are loc inegalitatea Cauchy-Schwarz generalizată,

$$| < Ax, y > | \leq < Ax, x >^{\frac{1}{2}} < Ay, y >^{\frac{1}{2}}, \; \forall x, y \in X.$$

(Vom face convenţia să numim această inegalitate, inegalitatea Cauchy-Schwarz corespunzătoare operatorului pozitiv A).

Adăugam că dacă în inegalitatea de mai sus facem $y = Ax$, rezultă

$$\|Ax\| \leq \|A\|^{\frac{1}{2}} < Ax, x >^{\frac{1}{2}}, \; \forall x \in X.$$

Teorema 4.9 *Fie $(A_n)_n$ un şir de operatori din $\mathcal{A}(X)$ având următoarele proprietăţi:*

1) $A_n \leq A_{n+1}$, $\forall n \in N$;

2) $\exists B \in \mathcal{A}(X)$ satisfăcând $A_n \leq B$, $\forall n \in N$.

Atunci, există $A \in \mathcal{A}(X)$ astfel încât pentru fiecare $x \in X$, şirul $(A_n(x))_n$ converge în X la $A(x)$ (adică şirul de operatori $(A_n)_n$ converge punctual la A). Mai mult, $A = \sup\limits_n A_n$.

Demonstraţie. Putem presupune, fără a pierde generalitatea că $(A_n)_n \subset \mathcal{A}_+(X)$ (deoarece, în caz contrar în demonstraţia de mai jos înlocuim A_n prin $A_n - A_1$). Pentru $x \in X$ arbitrar fixat, să considerăm şirul numeric $(< A_n x, x >)_n$ şi să notăm că el este un şir crescător şi mărginit superior (de $< Bx, x >$). Rezultă că acest şir este convergent, fapt pe care îl vom utiliza ca să arătăm că şirul $(A_n x)_n$ este Cauchy în X. Prin urmare, fie $m, n \in N$, $m \geq n$. Folosind inegaliatea lui Cauchy-Schwarz corespunzătoare operatorului pozitiv $A_m - A_n$, obţinem

$$\|A_m x - A_n x\|^4 =< (A_m - A_n)x, (A_m - A_n)x >^2 \leq$$

$$\leq < (A_m - A_n)x, x > \cdot < (A_m - A_n)^2 x, (A_m - A_n)x > \leq$$

$$\leq < (A_m - A_n)x, x > \cdot \|A_m - A_n\|^4 \cdot \|(A_m - A_n)x\|^2.$$

Rezultă că

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq 2\|B\| \ < (A_m - A_n)x, x >,$$

deci $(A_n x)_n$ este şir Cauchy în spaţiul Hilbert X. Atunci, există $A(x) = \lim\limits_{n \to \infty} A_n(X)$; cum limita punctuală a unui şir de operatori autoadjuncţi este ea însăşi în $\mathcal{A}(X)$ şi cum

$$< A_n x, x > \leq < A_{n+m} x, x >, \ \forall n, m \in N,$$

rezultă că A este un majorant al şirului $(A_n)_n$ în $\mathcal{A}(X)$. Dacă C este un alt majorant al acestui şir, avem $< A_n x, x > \leq < Cx, x >$, deci, pentru $n \to \infty$, $A \leq C$; prin urmare $A = \sup\limits_n A_n$.

Teorema 4.10 *Fie A, B în $A_+(X)$ astfel încât $AB = BA$. Atunci $AB \in A_+(X)$.*

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{A}_+(X)$, $A \neq 0$ (dacă $A = 0$ totul este clar). Să definim inductiv şirul de operatori $(A_n)_n$,

$$A_1 = \frac{1}{\|A\|} A; \ A_{n+1} = A_n - A_n^2, \ \forall n \geq 2.$$

Şirul de operatori continui $(A_n)_n$ are următoarele proprietăţi:

1) $0 \leq A_n \leq I$, $\forall n \in N$;

2) $A_n B = B A_n, \forall n \in N$;

3) $A_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 x$, $\forall x \in X$.

Să presupunem pentru moment că am demonstrat deja că şirul $(A_n)_n$ are aceste proprietăţi (de fapt ultimele două; prima este utilizată pentru a o demonstra pe a treia). Atunci, $\forall x \in X$,

$$< ABx, x >= \|A\| < \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(Bx), x >= \|A\| < \sum_{n=1}^{\infty} A_n B A_n x, x >=$$

$$= \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} < BA_n x, A_n x > \geq 0$$

şi deci demonstraţia este încheiată.

Să ne întoarcem acum la verificarea proprietăţilor şirului $(A_n)_n$. Demonstrăm 1) prin inducţie. Dacă $n = 1$, conform observaţiei 3), $0 \leq A_1$. Deoarece $\|A\| = |||A|||$, $< Ax, x > \leq \|A\| < x, x >$, $\forall x \in X$, deci $A_1 \leq I$. Mai departe, să presupunem că $0 \leq A_n \leq I$ şi să dovedim că $0 \leq A_{n+1} \leq I$. Aceasta rezultă din

$$I - A_{n+1} = I - A_n + A_n^2 = (I - A_n) + A_n^2$$

şi din

$$A_{n+1} = A_n - A_n^2 = A_n(I - A_n)^2 + (I - A_n)A_n^2,$$

ţinând cont că suma a doi oparatori pozitivi este tot un operator pozitiv şi că operatorii $I - A_n$, A_n^2, $A_n(I - A_n)^2$, $(I - A_n)A_n^2$ sunt pozitivi. Un calcul simplu arată că operatorii $A_n(I - A_n)^2$, $(I - A_n)A_n^2$ sunt într-adevăr în $\mathcal{A}_+(X)$:

$$< A_n(I - A_n)^2 x, x >=< (I - A_n)A_n(I - A_n)x, x >=$$

$$=< A_n(I - A_n)x, (I - A_n)x > \geq 0$$

şi respectiv

$$< (I - A_n)A_n^2 x, x >=< A_n(I - A_n)A_n x, x >=< (I - A_n)A_n x, A_n x > \geq 0 .$$

Proprietatea 2) se poate verifică uşor de asemenea prin inducţie bazându-ne pe ipoteza din enunţul teoremei, $AB = BA$. Pentru 3), avem,

$$A_1 = A_2 + A_1^2 = A_3 + A_2^2 + A_1^2 = \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + A_{n+1}, \ \forall n \in N.$$

Atunci,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = A_1 - A_{n+1} \leq A_1, \ \forall n \in N.$$

Concluzionăm că şirul $(\sum_{k=1}^{n} A_k^2)_n$ este mărginit şi totodată crescător, deci conform Teoremei 4.9, pentru orice $x \in X$, seria $\sum_{k \geq 1} A_k^2 x$ converge în X.

Totodată, pentru orice $x \in X$,

$$\sum_{k=1}^{n} \|A_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < A_k x, A_k x >= \sum_{k=1}^{n} < A_k^2 x, x >=$$

$$=< \sum_{k=1}^{n} A_k^2 x, x > \leq < A_1 x, x >,$$

deci, seria numerică $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^2$ este convergentă. Prin urmare, pentru $x \in X$ arbitrar $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x = 0$. Cum

$$A_1 x = \sum_{k=1}^{n} A_k^2 x + A_{n+1} x, \ \forall n \in N,$$

pentru $n \to \infty$, rezultă că $A_1 x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 x$, şi (3) este dovedită.

Teorema 4.11 (Teorema rădăcinii pătrate) *Pentru orice operator pozitiv $A \in \mathcal{A}_+(X)$ există un unic operator pozitiv $B \in \mathcal{A}_+(X)$, (numit rădăcina pătrată a operatorului A, $\sqrt{A}$) astfel încât $B^2 = A$. În plus, B comută cu orice operator liniar şi continuu care comută cu A.*

Demonstraţie. Dacă $A = 0$, luăm $B = 0$. Să presupunem deci că $A \neq 0$. Atunci, putem presupune fără a pierde generalitatea că $\|A\| = 1$ (deoarece, în caz contrar considerăm operatorul $(1/\|A\|)A$ şi dacă rădăcina sa pătrata este B', cea a operatorului A este în mod evident $\sqrt{\|A\|} \cdot B'$).

Să definim inductiv şirul de operatori $(B_n)_n$,

$$B_1 = 0 \text{şi } B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2), \ n \geq 1$$

şi să verificăm prin inducţie că acest şir este crescător şi mărginit în $\mathcal{A}(X)$. Deoarece $B_1 = 0$, B_1 este în $\mathcal{A}(X)$ şi, presupunând că $B_n \in \mathcal{A}(X)$, B_{n+1} este de asemenea în $\mathcal{A}(X)$ pentru că sumă de operatori autoadjuncţi este de asemenea operator autoadjunct. Acum, să verificăm că $B_n \leq I$, $\forall n$. Aceasta rezultă din

$$I - B_{n+1} = I - B_n - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B_n^2 = \frac{1}{2}(I - B_n)^2 + \frac{1}{2}(I - A)$$

deoarece $I - A \geq 0$. Presupunând că $B_{n-1} \leq B_n$ $(n \geq 2)$ şi comparând B_n cu B_{n+1} avem:

$$B_{n+1} - B_n = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2) - B_{n-1} - \frac{1}{2}(A - B_{n-1}^2) =$$

$$= B_n - B_{n-1} - \frac{1}{2}(B_n^2 - B_{n-1}^2) =$$

$$= (B_n - B_{n-1})\frac{1}{2}[(I - B_n) + (I - B_{n-1})] \geq 0,$$

(Am folosit Teorema 4.10 deoarece operatorii

$$(B_n - B_{n-1}) \ \text{ şi } [(I - B_n) + (I - B_{n-1})]$$

comută în mod clar, deci ipoteza acestei teoreme este satisfăcută).

Conform Teoremei 4.9, există $B \in \mathcal{A}_+(X)$ limita punctuală a şirului $(B_n)_n$. Pentru $x \in X$ arbitrar fixat avem

$$\|B_n^2 x - B^2 x\| \leq \|B_n(B_n x) - B(Bx)\| =$$

$$= \|B_n(B_n x) - B_n(Bx) + B_n(Bx) - B(Bx)\| \leq$$

$$\leq \|B_n\| \cdot \|B_n x - Bx\| + \|B_n(Bx) - B(Bx)\| \longrightarrow 0$$

ceea ce arată că $B_n^2 x \longrightarrow B^2 x$, pentru $n \to \infty$. Atunci, trecând la limită în raport cu n în egalitatea

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2)$$

rezultă că $B^2 = A$.

Să dovedim mai departe că operatorul B construit mai sus este unic astfel încât $B^2 = A$. Dacă C este un alt operator în $\mathcal{A}_+(X)$ satisfăcând $C^2 = A$, atunci el comută cu B. Aceasta rezultă prin inducţie, aşa cum reiese din următorul calcul (deoarece $AC = CA$) :

$$CB_{n+1} = CB_n + \frac{1}{2}(CA - CB_n^2) = B_nC + \frac{1}{2}(AC - B_n^2C) = B_{n+1}C.$$

Acum, pentru a arăta că $Cx = Bx$, $\forall x \in X$, cum

$$\|Cx - Bx\|^2 =< (C - B)x, (C - B)x >=< x, (C - B)^2 x >,$$

este suficient să stabilim că $(C - B)((C - B)x) = 0$. Ţinând cont că C şi B sunt în $\mathcal{A}_+(X)$ şi că $BC = CB$, şi notând $(C - B)x$ cu y, avem

$$0 \leq < Cy, y > + < By, y >=< (B + C)y, y >=$$

$$=< (B + C)(B - C)x, (B - C)x >=< (B^2 - C^2)x, x >= 0.$$

Prin urmare $< Cy, y >= 0$ şi $< By, y >= 0$. Dar, cu inegalitatea Cauchy-Schwarz corespunzătoare operatorului pozitiv C (şi similar pentru B), rezultă

$$\|Cy\|^2 =< Cy, Cy > \leq < Cy, y >^{\frac{1}{2}} < C^2 y, Cy >^{\frac{1}{2}} = 0,$$

ceea ce implică $Cy = By = 0$ şi, în final $(C - B)y = 0$ (egalitatea dorită).

Pentru a încheia demonstraţia, să observăm că dacă T este un operator mărginit care comută cu A, atunci, din relaţia prin care am definit inductiv şirul $(B_n)_n$, rezultă că $TB_n = B_n T$, deci pentru $n \to \infty$, $TB = BT$.

4.5.2 Operatori normali, operatori unitari, proiecţii

Definiţie. $T \in \mathcal{B}(X)$ se numeşte operator *normal* dacă $T\,T^* = T^*T$.

Observaţie. Notăm că orice operator autoadjunct este normal.

Propoziţia 4.12 *Fie X spaţiu Hilbert complex şi $T \in B(X)$ un operator normal. Atunci, $|||T||| = \|T\|$.*

Demonstraţie. Deoarece T este normal, pentru fiecare $n \in N$, $(T\,T^*)^n = T^n(T^*)^n$. Prin urmare,

$$\|T\|^{2^n} = (\|T\,T^*\|^{\frac{1}{2}})^{2^n} = (\|T^*\|^{2^n})^{\frac{1}{2}} = \|(T^*)^{2^n}\|^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|T^{2^n}(T^*)^{2^n}\|^{\frac{1}{2}} = \|T^{2^n}(T^{2^n})^*\|^{\frac{1}{2}} = \|T^{2^n}\|.$$

Conform Teoremei 4.6, rezultă că $\|T^{2^n}\| \leq 2|||T^{2^n}|||$ şi, aplicând aceeaşi teoremă, punctul 3), avem $|||T^{2^n}||| \leq 2|||T|||^{2^n}$, deci, în definitiv,

$$\|T\|^{2^n} \leq 2|||T|||^{2^n},$$

adică, $\|T\| \leq 2^{\frac{1}{2^n}} |||T|||$, $\forall n \in N$. Concluzionăm că $\|T\| \leq |||T|||$ şi cum întotdeauna inegalitatea $|||T||| \leq \|T\|$ este verificată, demonstraţia propoziţiei este încheiată.

Propoziţia 4.13 *Fie X spaţiu Hilbert real sau complex şi T în $B(X)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1) T este normal;
2) $\|Tx\| = \|T^*x\|$, $\forall x \in X$.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) rezultă din

$$\|Tx\|^2 = < Tx, Tx > = < x, T^*Tx > =$$

$$= < x, T\,T^*x > = < T^*x, T^*x > = \|T^*x\|^2$$

Pentru a dovedi reciproca, deoarece $TT^* - T^*T$ este autoadjunct, este suficient să verificăm conform Corolarului 4.8 că $< (TT^* - T^*T)x, x > = 0$, $\forall x \in X$. Cu 2), avem

$$< (TT^* - T^*T)x, x > = < TT^*x, x > - < T^*Tx, x > = \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = 0.$$

Definiţie. Un operator *unitar* este o aplicaţie surjectivă din X în X astfel încât

$$< Ux, Uy > = < x, y >, \ \forall x, y \in X.$$

Observaţie. *Orice operator unitar U pe X este liniar şi continuu.*

Să verificăm mai întâi liniaritatea lui U. Fie t arbitrar în X; cum U este surjectiv, $\exists z \in X$ astfel încât $U(z) = t$. Atunci, totul este clar, cu următorul calcul:

$$< U(\alpha x + \beta y), t > = < U(\alpha x + \beta y), Uz > = < \alpha x + \beta y, z > =$$

$$= \alpha < x, z > + \beta < y, z > = \alpha < Ux, Uz > + \beta < Uy, Uz > =$$

$$= < \alpha Ux, t > + < \beta Uy, t > = < \alpha Ux + \beta Uy, t >, \quad \forall x, y \in X, \alpha, \beta \in K.$$

Continuitatea operatorului U rezultă din definiţie, dacă în egalitatea $< Ux, Uy > = < x, y >$, $\forall x, y \in X$, punem $x = y$. Mai mult, $\|U\| = 1$.

Propoziţia 4.14 F*ie U un operator în $B(X)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(1) U este unitar;

(2) U este surjectiv şi $\|Ux\| = \|x\|$, $\forall x \in X$;
(3) $UU^* = U^*U = I$;
(4) U^* este unitar.
Demonstraţie. Este clar că (1) $\Rightarrow$ (2). Cu Identităţile de polarizare rezultă că o aplicaţie izometrică are proprietatea de a conserva produsul scalar, pentru că

$$4 < Ux, Uy >= \sum_{k=0}^{3} i^k \|U(x + i^k y)\|^2 = \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 = 4 < x, y >$$

(şi similar în cazul spaţiilor Hilbert reale), deci (2) $\Rightarrow$ (1).

Din (1) U este injectiv şi surjectiv, deci $\exists U^{-1}$ astfel încât $UU^{-1} = U^{-1}U = I$. Pe de alta parte

$$< Ux, Uy >=< x, y > \Leftrightarrow < x, U^*Uy >=< x, y >, \forall x, y \in X,$$

prin urmare, $U^*U = I$. Cum U este surjectiv, rezultă că $U^{-1} = U^*$ şi deci (1) $\Rightarrow$ (3). Reciproca este imediată deoarece (3) implică surjectivitatea lui U şi în plus

$$< Ux, Uy >=< x, U^*Uy >=< x, y > .$$

Acum, dacă U^* este unitar, ţinând cont că (1) $\Leftrightarrow$ (3),

$$U^*(U^*)^* = (U^*)^*U^* = I,$$

adică $U^*U = UU^* = I \Leftrightarrow U$ unitar.

Observaţie. *Să notăm că prin compunerea a doi operatori unitari se obţine tot un operator unitar, deci mulţimea $\mathcal{U}(X)$ a operatorilor unitari pe X înzestrată cu legea de compoziţie de compunere a operatorilor (numită şi produs şi notată ca atare) este grup (subgrup al grupului general liniar $\mathcal{GL}(X)$, grupul operatorilor inversabili din $\mathcal{B}(X)$).*

Definiţie. Un operator liniar şi mărginit P pe spaţiul Hilbert X se numeşte *proiector (proiecţie)* dacă $P^2 = P$. Un *proiector ortogonal* este un proiector cu proprietatea $P^* = P$.
Convenţie. Proiecţiile ortogonale apar mult mai frecvent în aplicaţii practice decât cele neortogonale. Din acest motiv, convenim ca în continuare să folosim denumirea de *proiector (proiecţie) cu înţelesul de proiector ortogonal.* Deci, mai departe, $P \in \mathcal{B}(X)$ este o proiecţie dacă $P^2 = P$ şi $P^* = P$.

Observaţie. Orice proiecţie este un operator pozitiv, aşa cum rezultă cu următorul calcul:

$$< Px, x >=< P^2x, x >=< Px, Px >= \|Px\|^2, \ \forall x \in X.$$

În plus, $\sqrt{P} = P$.

Notaţie. Fie Y subspaţiu liniar închis al lui X. Conform Teoremei Proiecţiei (2.19), orice $x \in X$ se descompune în mod unic ca $x = x_1 + x_2$, cu $x_1 \in Y$ şi $x_2 \in Y^\perp$. Fie P_Y operatorul pe X definit prin $P_Y(x) = x_1$.

Teorema următoare pune în evidenţă corespondenţa dintre proiectori şi subspaţiile liniare închise ale unui spaţiu Hilbert.

Teorema 4.15 *Fie X spaţiu Hilbert şi Y subspaţiu liniar închis al lui X. Atunci, operatorul P_Y este un proiector. Reciproc, dacă P este un proiector pe X, există un subspaţiu liniar închis Y al spaţiului X astfel încât $P_Y = P$.*

Demonstraţie. Să verificăm mai întâi că $P_Y \in \mathcal{B}(X)$. Fie x, y în X, deci $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, cu $x_1, y_1 \in Y$, $x_2, y_2 \in Y^\perp$ şi α, $\beta \in K$. Cum Y şi $Y^\perp$ sunt subspaţii liniare, $\alpha x_1 + \beta y_1 \in Y$ şi $\alpha x_2 + \beta y_2 \in Y^\perp$. Atunci,

$$P_Y(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha P_Y(x) + \beta P_Y(y).$$

adică P_Y este liniar. Continuitatea rezultă din

$$\|P_Y(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2.$$

În plus avem

$$P_Y^2(x) = P_Y(P_Y(x)) = P_Y(x_1) = x_1 = P_Y(x)$$

şi

$$< P_Y(x), y >=< x_1, y_1 + y_2 >=$$
$$=< x_1 + x_2, y_1 > + < x_1, y_2 >=< x, P_Y(y) > .$$

În concluzie P_Y este o proiecţie.

Reciproc, fie $P \in \mathcal{A}(X)$, astfel încât $P^2 = P$. Să notăm cu Y subspaţiul $P(X)$ şi să dovedim că Y este închis. Fie $y \in \overline{Y}$ şi $(x_n)_n \subset X$ astfel încât $Px_n \longrightarrow y$. Atunci,

$$y = \lim_n Px_n = \lim_n P(Px_n) = P(\lim_n Px_n) = P(y),$$

deci $y \in Y$. Prin urmare $Y = \overline{Y}$.

Să arătăm acum că $P = P_Y$. Pentru x arbitrar în X, putem scrie $x = x_1 + x_2$ unde $x_1 \in P(X)$, $(x_1 = Pz,\ z \in X)$, $x_2 \in P(X)^\perp = \operatorname{Ker} P$, deci avem

$$P(x) = P(Pz + x_2) = Pz + Px_2 = Pz = x_1 = P_Y x.$$

Observaţie. *Pentru orice subspaţiu liniar închis Y, operatorul P_Y definit mai sus se numeşte proiecţia pe subspaţiul Y, deci putem spune că orice proiector este proiecţia pe propria-i imagine.*

4.6 Reprezentarea matricială a operatorilor mărginiţi

Am văzut că oricărui operator pe spaţiul Hilbert K^n i se poate asocia în mod natural o matrice, matricea sa în baza ortonormală standard. Acest rezultat poate fi generalizat la cazul operatorilor din $\mathcal{B}(X)$, unde X este spaţiu Hilbert având o bază ortonormală numărabilă (infinită), fie aceasta $\{e_n \mid n \in N\}$. Atunci, orice $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$. Din liniaritatea şi continuitatea lui T, rezultă

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > Te_n.$$

Pe de altă parte, dezvoltând în serie Fourier fiecare Te_n $(n \in N)$ se obţine

$$Te_n = \sum_{k=1}^{\infty} < Te_n, e_k > e_k.$$

Combinând cele două relaţii de mai sus, concludem că

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} < x, e_n >< Te_n, e_k > e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >< Te_n, e_k > e_k.$$

Deci, avem

$$\begin{pmatrix} < Te_1, e_1 > & < Te_2, e_1 > & \cdots \\ < Te_1, e_2 > & < Te_2, e_2 > & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} < x, e_1 > \\ < x, e_2 > \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < Tx, e_1 > \\ < Tx, e_2 > \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Această relaţie matricială ne conduce la următoarea definiţie:

Definiţie. Fie T un operator liniar şi mărginit pe spaţiul Hilbert X având bază ortonormală numărabilă infinită şi $\{e_n \mid n \in N\}$ o bază ortonormală numărabilă infinită a lui X. *Matricea* corespunzătoare lui T şi bazei ortonormale $\{e_n \mid n \in N\}$ este definită prin

$$a_{ij} = < Te_j, e_i >, \quad i, j \in N.$$

Definiţie. Un operator liniar şi mărginit pe spaţiul Hilbert X având bază ortonormală numărabilă se numeşte *diagonalizabil* dacă există o bază ortonormală $\{e_n \mid n \in N\}$ a lui X astfel încât matricea corespuzătoare lui T şi bazei ortonormale $\{e_n \mid n \in N\}$ să fie diagonală.

Exemplu. Pentru $(\lambda_n)_n$ un şir din l^∞_K operatorul T pe l^2_K definit prin

$$T(\xi_n)_n = (\lambda_n \xi_n)_n$$

are maticea în baza standard a spaţiului l^2_K

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 0 & \lambda_n & 0 & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & \cdot \end{array}\right).$$

ceea ce explică denumirea sa de operator diagonal.

Capitolul 5

Teorie spectrală elementară

5.1 Elemente inversabile în algebre Banach

Dacă X este spaţiu normat, pe spaţiul liniar al operatorilor liniari şi mărginiţi pe X, $\mathcal{B}(X)$, compunerea operatorilor, care va fi notată multiplicativ, este o lege de compoziţie internă. $(\mathcal{B}(X), \cdot)$ are o structură naturală de algebră înzestrată cu o normă submultiplicativă ($\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$, $\forall S, T \in \mathcal{B}(X)$). În cazul în care X este spaţiu Banach (Hilbert) $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach. Acesta este modelul nostru pentru o structură algebrico-topologică deosebit de bogată, numită algebră Banach. Mai întâi, vom pune în evidenţă în algebre Banach proprietăţile legate de inversarea elementelor, proprietăţi utile în particular şi în $\mathcal{B}(X)$.

Definiţie. O algebră Banach peste corpul K este un spaţiu Banach $({}_K\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, înzestrat cu o lege multiplicativă asociativă, $(S, T) \longmapsto ST$, astfel încât $(\mathcal{A}, \cdot)$ are o structură algebrică de algebră, adică

1) $\lambda(ST) = (\lambda S)T) = S(\lambda T)$, $\forall S, T \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in K$;
2) $(S + T)V = SV + TV$, $\forall S, T, V \in \mathcal{A}$;
3) $S(T + V) = ST + SV$, $\forall S, T, V \in \mathcal{A}$

şi astfel încât norma lui $\mathcal{A}$ este submultiplicativă, aceasta însemnând

4) $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$, $\forall S, T \in \mathcal{A}$.

Algebra Banach $\mathcal{A}$ se numeşte *unitară* dacă există $I \in \mathcal{A}$ (în mod necesar unic) numit *unitate* a algebrei $\mathcal{A}$, astfel încât $IT = TI = T, \forall T \in \mathcal{A}$. Spunem că algebra $\mathcal{A}$ este comutativă dacă $ST = TS$, $\forall S, T \in \mathcal{A}$.

Observaţie. Se poate demonstra că dacă $\mathcal{A}$ este o algebră Banach unitară,

$\mathcal{A} \neq \{0\}$, ea poate fi normată cu o normă echivalentă cu cea iniţială astfel încât $\|I\| = 1$; deci putem presupune fără a pierde generalitatea că $\|I\| = 1$.
Definiţie. Un element U al algebrei Banach unitare $\mathcal{A}$, se numeşte inversabil dacă există elementele $S, T \in \mathcal{A}$ astfel încât $US = TU = I$.
Notaţie. Elementele S,T din definiţia de mai sus sunt în mod necesar egale:

$$S = IS = (TU)S) = T(US) = TI = T.$$

Pri urmare, vom nota cu $U^{-1} = S = T$ şi vom numi acest element inversul lui U. Să notăm că inversul unui element, în cazul în care există, este unic.

Mulţimea tuturor elementelor inversabile într-o algebra Banach $\mathcal{A}$, notată mai departe cu $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, înzestrată cu restricţia legii multiplicative din $\mathcal{A}$ are o structură algebrică de grup (numit în cazul $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, aşa cum am mai precizat, *grupul general liniar*).

În continuare, $\mathcal{A}$ va fi o algebră Banach unitară, cu unitatea I, $\|I\| = 1$.
Teorema 5.1 *Fie $T \in \mathcal{A}$ cu $\|T\| < 1$. Atunci, $I - T \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, şi*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad (T^0 = I).$$

În plus,

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Demonstraţie. Pentru n număr natural arbitrar fixat, deoarece norma este submultiplictivă, $\sum_{k=0}^{n} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|T\|^k$ şi cum $\|T\| < 1$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} T^n$ este absolut convergentă. $\mathcal{A}$ fiind spaţiu Banch concluzionăm că $\sum_{n\geq 0} T^n$ este convergentă. Fie $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$. Cum

$$(I - T)S_n = S_n(I - T) = I - T^{n+1}$$

şi cum $I - T^{n+1} \longrightarrow I$ pentru $n \to \infty$, (deoarece $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$, şi $\|T\| < 1$) rezultă că

$$(I - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = (\sum_{n=0}^{\infty} T^n)(I - T) = I,$$

ceea ce dovedeşte că $I - T$ este inversabil şi că $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Atunci,

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

Corolarul 5.2 *Fie $T \in A$ şi $\|I - T\| < 1$. Atunci, $T \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, şi*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - T)^n.$$

Demonstraţie. Totul este clar dacă aplicăm teorema precedentă elementului $I - T$.

Corolarul 5.3 *Fie $T_o \in \mathcal{A}$ inversabil şi T un element din $\mathcal{A}$ cu proprietatea $\|T - T_o\| < 1/\|T_o^{-1}\|$. Atunci $T \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$,*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [T_o^{-1}(T_o - T)]^n T_o^{-1}$$

şi

$$\|T^{-1} - T_o^{-1}\| \leq \frac{\|T_o^{-1}\|^2 \|T - T_o\|}{1 - \|T_o^{-1}\| \cdot \|T - T_o\|}.$$

Demonstraţie. Deoarece $T = T_o - (T_o - T) = T_o[I - T_o^{-1}(T_o - T)]$ şi $\|T_o^{-1}(T_o - T)\| \leq \|T_o^{-1}\| \cdot \|(T_o - T)\| < 1$ cu Teorema 5.1 rezultă că T este inversabil şi că

$$T^{-1} = [I - T_o^{-1}(T_o - T)]^{-1} T_o^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [T_o^{-1}(T_o - T)]^n T_o^{-1},$$

sau, echivalent,

$$T^{-1} - T_o^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} [T_o^{-1}(T_o - T)]^n T_o^{-1}.$$

Folosind submultiplicitatea normei, avem

$$\|T^{-1} - T_o^{-1}\| \leq \|T_o^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|T_o^{-1}(T_o - T)\|^n \leq$$

$$\leq \|T_o^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|T_o^{-1}\| \cdot \|T_o - T\|)^n = \frac{\|T_o^{-1}\|^2 \|T - T_o\|}{1 - \|T_o^{-1}\| \cdot \|T - T_o\|}.$$

Corolarul 5.4 *Grupul multiplicativ $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este un subgrup deschis în $\mathcal{A}$ şi aplicaţia $T \longmapsto T^{-1}$ pe $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este un homeomorfism al lui $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.*

Demonstraţie. Cu corolarul precedent, pentru $T_o \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, arbitrar fixat, bila deschisă $B(T_o, \frac{1}{\|T_o^{-1}\|}) \subset \mathcal{G}(\mathcal{A})$, deci $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este mulţime deschisă în $\mathcal{A}$. În plus, cum

$$\|T^{-1} - T_o^{-1}\| \le \frac{\|T_o^{-1}\|^2\|T - T_o\|}{1 - \|T_o^{-1}\| \cdot \|T - T_o\|}, \ \forall T \in B(T_o, \frac{1}{\|T_o^{-1}\|}),$$

rezultă că aplicaţia $T \longmapsto T^{-1}$ ca şi inversa sa, sunt continue pe $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Observaţie. Este bine să rescriem aceste rezultate în cazul particular $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$. Ţinânad cont că inversabilitatea unui element din algebra $\mathcal{B}(X)$ este echivalentă cu bijectivitatea operatorului respectiv şi că convergenţa în $\mathcal{B}(X)$ o implică pe cea punctuală, obţinem:

(1) Pentru $T \in \mathcal{B}(X)$ cu $\|T\| < 1$, operatorul $I - T$ este bijectiv şi pentru fiecare $y \in X$,

$$(I - T)^{-1}y = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y$$

(Teorema 5.1).

(2) Fie $T_o \in \mathcal{B}(X)$ inversabil. Să considerăm $T \in \mathcal{B}(X)$ cu $\|T - T_o\| <$ $< 1/\|T_o^{-1}\|$. Atunci T este inversabil, şi pentru orice $y \in X$,

$$T^{-1}y = \sum_{n=0}^{\infty} [T_o^{-1}(T_o - T)]^n T_o^{-1} y$$

(Corolarul 5.3).

5.2 Spectru, raza spectrală

5.2.1 Spectru, mulţime rezolvantă

Ca şi mai înainte $\mathcal{A}$ este o algebră Banach unitară peste K, având unitatea I, $\|I\| = 1$.

Definiţie. Pentru orice $T \in {}_K\mathcal{A}$, *spectrul* elementului T, notat cu $\sigma(T)$, este mulţimea de numere din K,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in K \mid \lambda I - T \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})\}.$$

Complementara în K a mulţimii $\sigma(T)$ se numeşte *mulţimea rezolvanta* a lui T şi va fi notata cu $\rho(T)$; numerele din $\rho(T)$ se numesc *numere regulate* pentru

T. Aplicaţia definită pe $\rho(T)$ cu valori în $\mathcal{A}$, prin

$$R(T;\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$$

se numeşte *funcţia rezolvanta* a elementului T.

Observaţie. Dacă algebra $\mathcal{A}$ este reală ($K = R$), este posibil să existe elemente T în $\mathcal{A}$, cu $\sigma(T) = \emptyset$. De exemplu, luând $\mathcal{A} = \mathcal{L}(R^2)$, elementul

$$T \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

are spectrul vid. Scopul principal al paragrafului de faţă este de a demonstra că aceasta nu se întâmplă în cazul algebrelor complexe, deci că spectrul oricărui element într-o algebra (Banach unitară) complexă este nevid.

Un pas în această direcţie este următorul rezultat.

Propoziţia 5.5 *Pentru orice $T \in \mathcal{A}$, muţimea rezolvanta a lui T, $\rho(T)$ este o submulţime deschisă în C.*

Demonstraţie. Fie $\lambda_o \in \rho(T)$ şi λ în C arbitrar. Atunci,

$$|\lambda - \lambda_o| = \|(\lambda I - T) - (\lambda_o I - T)\|,$$

deci, cu Corolarul 5.3, dacă

$$\|(\lambda I - T) - (\lambda_o I - T)\| \leq \frac{1}{\|(\lambda_o I - T)^{-1}\|},$$

$\lambda I - T$ este inversabil, adică $\lambda \in \rho(T)$. Rezultă că

$$\mathcal{B}(\lambda_o, \frac{1}{\|(\lambda_o I - T)^{-1}\|}) \subset \rho(T).$$

În continuare, $\mathcal{A}$ este o algebră Banach complexă unitară ($K = C$), $\mathcal{A} \neq \{0\}$. Pentru a obţine rezultatul anunţat ($\sigma(T) \neq \emptyset, \forall T \in \mathcal{A}$) trebuie mai întâi să demonstrăm câteva propoziţii preliminare.

Lema 5.6 *Pentru orice $T \in \mathcal{A}$, funcţia rezolvanta a elementului T are următoarele proprietăţi:*

(1) $R(T;\cdot)$ este continuă pe $\rho(T)$;

(2) Pentru λ, $\mu \in \rho(T)$,

$$R(T;\lambda) - R(T;\mu) = (\mu - \lambda)\ R(T;\lambda)\ R(T;\mu)$$

(ecuaţia lui Hilbert);
(3) $R(T;\cdot)$ *este o funcţie olomorfă pe* $\rho(T)$;
(4) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} R(T;\lambda) = 0.$

Demonstraţie. (1) rezultă din continuitatea aplicaţiei $T \longmapsto T^{-1}$ (Corolarul 5.4) ţinând cont de definiţia funcţiei $R(T;\cdot)$.

(2) rezultă din următorul scurt calcul, înmulţind la dreapta cu $R(T;\mu)$:

$$I = (\mu I - T)\ R(T;\mu) = [(\mu - \lambda)I + \lambda I - T]\ R(T;\mu) =$$

$$= (\mu - \lambda)\ R(T;\mu) + (\lambda I - T)\ R(T;\mu).$$

(3) Pentru $\lambda_o \in \rho(T)$ arbitrar, cu (1), (2), avem

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \frac{R(T;\lambda) - R(T;\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} = \lim_{\lambda\to\lambda_o} - R(T;\lambda)\ R(T;\lambda_o) = -R(T;\lambda_o)^2$$

ceea ce arată că $R(T;\cdot)$ este olomorfă pe $\rho(T)$.

(4) Fie $\lambda \in \rho(T)$ astfel încât $|\lambda| > \|T\|$; cum $\|T\ /\ \lambda\| < 1$, conform Teoremei 5.1, există $(I - \frac{T}{\lambda})^{-1}$ şi

$$\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n,$$

sau, echivalent, $(\lambda I - T) \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ şi

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

Estimând norma lui $(\lambda I - T)^{-1}$ rezultă că

$$\|R(T;\lambda)\| = \|\,(\lambda I - T)^{-1}\,\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|} \left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^n =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \longrightarrow 0,$$

pentru $|\lambda| \to \infty$, deci (4) este demonstrată.

Din demonstraţia de mai sus rezultă şi următoarea consecinţă.

Corolarul 5.7 *1)* $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$;

2) Pentru $\forall\lambda \in C$ *cu* $|\lambda| > \|T\|$,

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Lema 5.8 (Teorema Liouville în algebre Banach) *Fie* $\mathcal{O}(D, \mathcal{A})$ *spaţiul funcţiilor olomorfe definite pe* $D = \overset{\circ}{D} \subset C$ *cu valori în* $\mathcal{A}$*. Atunci,*

1) Pentru orice $x \in \mathcal{O}(D, \mathcal{A})$ *şi* $f \in \mathcal{A}^*$*, funcţia* $f \circ x$ *este în* $\mathcal{O}(D, C)$*.*

2) Orice funcţie mărginită $x \in \mathcal{O}(C, \mathcal{A})$ *(funcţie analitică întreagă) este constantă.*

Demonstraţie. 1) Fie $f \in \mathcal{A}^*$, $x \in \mathcal{O}(D, \mathcal{A})$ şi $\lambda_o \in D$, deci există un element $x'(\lambda_o)$ în $\mathcal{A}$, astfel încât

$$\left|\frac{(f \circ x)(\lambda) - (f \circ x)(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - f(x'(\lambda_o))\right| = \left|f\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - x'(\lambda_o)\right)\right| \leq$$

$$\leq \|f\| \left\|\frac{x(\lambda) - x(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - x'(\lambda_o)\right\|.$$

Rezultă că $f \circ x \in \mathcal{O}(D, C)$ şi în plus $(f \circ x)'(\lambda_o) = f(x'(\lambda_o))$.

2) Fie $x \in \mathcal{O}(C, \mathcal{A})$, $\|x(\lambda)\| \leq M$, $\forall\lambda \in C$ şi f arbitrară în $\mathcal{A}^*$. Cum

$$\|(f \circ x)(\lambda)\| \leq \|f\| \, \|x(\lambda)\| \leq M \, \|f\|,$$

avem că $f \circ x$ este o funcţie olomorfă pe C mărginită, deci, cu Teorema lui Liouville, $f \circ x$ este constantă, $(f \circ x)(\lambda) = (f \circ x)(0)$, $\forall\lambda \in C$. Prin urmare, pentru orice λ arbitrar în C, $f(x(\lambda) - x(0)) = 0, \forall f \in \mathcal{A}^*$. Atunci, conform Corolarului 3.9, $x(\lambda) - x(0) = 0$, $\forall\lambda \in C$, adică x este constantă pe C.

Teorema 5.9 *Spectrul oricărui element al unei algebre Banach complexe unitare, este o mulţime de numere complexe nevidă compactă.*

Demonstraţie. Fie $T \in \mathcal{A}$. Conform Propoziţiei 5.5, $\rho(T)$ este deschisă şi din Corolarul 5.7, $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$. Prin urmare, complementara mulţimii $\rho(T)$ în C, $\sigma(T)$ este închisă, şi cum este şi mărginită, este compactă în C. Să presupunem prin absurd că $\sigma(T) = \emptyset$. Atunci, funcţia rezolvanta a lui T este o funcţie analitică întreagă (este mărginită deoarece $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} R(T; \lambda) = 0$); utilizând lema precedentă, concluzionăm că $R(T; \cdot)$ este constantă, deci, cum limita acestei funcţii la ∞ este zero, $R(T; \lambda) = 0$, $\forall\lambda \in C$. Atunci,

$$I = R(T; \lambda)^{-1} R(T; \lambda) = 0,$$

ceea ce este în contradicţie cu $\mathcal{A} \neq \{0\}$.

O consecinţă imediată a teoremei de mai sus este următorul rezultat, cunoscut sub numele de Teorema Gelfand-Mazur.

Corolarul 5.10 *Fie $\mathcal{A}$ algebră Banach complexă unitară care este corp ($\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\backslash\{0\}$). Atunci $\mathcal{A}$ este izometric izomorfă cu C.*

Demonstraţie. Pentru T arbitrar în $\mathcal{A}$, cum spectrul său este nevid, $\exists\lambda \in C$ astfel încât $\lambda I - T$ nu este inversabil. Rezultă că $\lambda I - T = 0$, adică $T = \lambda I$. În plus, $\|T\| = \|\lambda I\| = |\lambda|$.

Propoziţia 5.11. *Fie T în $\mathcal{A}$ astfel încât $0 \notin \sigma(T)$ (T inversabil). Atunci*

$$\sigma(T^{-1}) = \quad = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \sigma(T^{-1})$ (în mod necesar $\lambda \neq 0$). Atunci, $\lambda I - T^{-1} \notin \mathcal{G}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow I - \frac{1}{\lambda}T^{-1} \notin \mathcal{G}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow T^{-1}(T - \frac{1}{\lambda}I) \notin \mathcal{G}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow T - \frac{1}{\lambda}I \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})$, deci $\lambda I - T \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})$.

5.2.2 Raza spectrală

Lema următoare este utilă pentru definirea noţiunii de rază spectrală.

Lema 5.12 *Fie $\mathcal{A}$ algebră unitară înzestrată cu o normă submultiplicativă. Atunci, pentru orice $T \in \mathcal{A}$, există*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demonstraţie. Fie $m \geq 1$ număr natural fixat şi $n \geq 1$, arbitrar în N. Atunci, aplicând Teorema împărţirii cu rest, există numerele naturale $q(n)$, $r(n)$ astfel încât

$$n = mq(n) + r(n) \text{şi } 0 \leq r(n) \leq m - 1.$$

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n} = 0 \text{şi } \lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = \frac{1}{m}.$$

Ţinând cont că norma este submultiplicativă, avem

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^m\|^{\frac{q(n)}{n}} \|T\|^{\frac{r(n)}{n}},$$

deci

$$\limsup_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_n \|T^m\|^{\frac{q(n)}{n}} \|T\|^{\frac{r(n)}{n}} =$$

$$= \|T^m\|^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q(n)}{n}} \|T\|^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r(n)}{n}} = \|T^m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Rezultă că

$$\limsup_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le \inf_{m\ge 1} \|T^m\|^{\frac{1}{m}},$$

inegalitate care, împreună cu

$$\inf_{n\ge 1} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \le \liminf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

arată că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n\ge 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Definiţie. Fie $\mathcal{A}$ algebră Banach complexă unitară şi $T \in \mathcal{A}$. Se numeşte *raza spectrală* a lui T (notată cu $\|T\|_\sigma$), numărul

$$\|T\|_\sigma = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Lema 5.13 *Pentru orice $\lambda \in C$ astfel încât $|\lambda| > \|T\|_\sigma$ seria $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{\lambda^n} T^n$ este convergentă.*

Demonstraţie. folosind Teorema Cauchy-Hadamard (privind seriile de puteri), rezultă că seria $\sum_{n\ge 0} \|T^n\|\ z^n$ converge pentru fiecare z cu proprietatea

$$|z| < \frac{1}{\limsup\limits_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\|T\|_\sigma}.$$

Deoarece pentru orice λ, cu $|\lambda| > \|T\|_\sigma$, avem $0 \le \frac{1}{|\lambda|} \le \frac{1}{\|T\|_\sigma}$, concluzionăm că seria $\sum_{n\ge 0} \|\frac{1}{\lambda^n} T^n\|$ converge. Deci, seria $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{\lambda^n} T^n$ este absolut convergentă, şi prin urmare, $\mathcal{A}$ fiind Banach, convergentă.

Observaţie. Deoarece pentru λ, cu $|\lambda| > \|T\|_\sigma$ seria $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{\lambda^n} T^n$ este convergentă, rezultă că pentru $\forall \lambda \in C$, cu $|\lambda| > \|T\|_\sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} T^n = 0$.

Următorul rezultat arată că raza spectrală este cel mai mic număr pozitiv cu proprietatea că $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, r)$.

Teorema 5.14 *Fie T un element al algebrei Banach complexe unitare $\mathcal{A}$. Atunci,*

1) Orice $\lambda \in C$ cu $|\lambda| > \|T\|_\sigma$ se află în $\rho(T)$ şi

$$R(T; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

2) Pentru raza spectrală a lui T are loc egalitatea:

$$\|T\|_\sigma = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Demonstraţie. 1) Conform lemei precedente, dacă $|\lambda| > \|T\|_\sigma$, seria $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\lambda^n} T^n$ este convergentă. Notând, pentru orice număr natural $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda^k} T^k,$$

avem

$$\left(I - \frac{T}{\lambda}\right) S_n = S_n \left(I - \frac{T}{\lambda}\right) = I - \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1}$$

Prin urmare,

$$\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}\right) = I.$$

Rezultă că elementul $\lambda I - T$ este inversabil, adică $\lambda \in \rho(T)$ şi

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

2) Din 1), obţinem că $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|_\sigma)$. Arătăm acum că pentru orice $r > 0$, $\|T\|_\sigma \leq \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| + r$. Pentru aceasta, notând cu $\xi_r = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| + r$, observăm că $\xi_r \notin \sigma(T)$. Deci, $\xi_r \in \rho(T)$ şi există $R(T; \xi_r) = (\xi_r I - T)^{-1}$. Pe de altă parte, pentru orice λ, cu $|\lambda| > \|T\|_\sigma$, $R(T; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n$. Din unicitatea dezvoltării în serie Laurent, rezultă că

$$R(T; \xi_r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\xi_r^{n+1}} T^n,$$

prin urmare

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{\xi_r^n} T^n \right\| = 0.$$

Atunci, putem concluziona că $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \xi_r$ (pentru n suficient de mare), adică $\|T\|_\sigma \leq \xi_r$, ceea ce încheie demonstraţia.

5.2.3 Spectru în algebre involutive

Ca şi mai înainte $\mathcal{A}$ este o algebră Banach complexă unitară.

Definiţie. O involuţie este o aplicaţie $T \longmapsto T^*$ din $\mathcal{A}$ în $\mathcal{A}$ având următoarele proprietăţi:
1) $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*, \quad \forall T, S \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in C$;
2) $(TS)^* = S^* T^*, \quad \forall T, S \in \mathcal{A}$;
3) $T^{**} = T, \quad \forall T \in \mathcal{A}$.
Involuţiile care apar în mod natural în algebre Banach sunt izometrice, adică $\|T^*\| = \|T\|$, $\forall T \in \mathcal{A}$.

Definiţie. O algebră Banach $\mathcal{A}$ dotată cu o involuţie se numeşte algebră Banach involutivă. Dacă involuţia este izometrică şi

$$\|TT^*\| = \|T\|^2, \quad \forall T \in \mathcal{A},$$

algebra $\mathcal{A}$ se numeşte C^*-algebră.

Observaţii. 1) În orice algebră unitară involutivă, $I^* = I$.

2) Dacă $T \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, un calcul simplu arată că $T^* \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ şi că $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Notăm, că algebra operatorilor liniari şi mărginiţi pe un spaţiu Hilbert X, $\mathcal{B}(X)$ este o C^*-algebră, unde T^* este în mod evident adjunctul operatorului T. Terminologia din această algebră este preluată parţial în algebre involutive generale, aşa cum se observă în definiţia următoare.

Definiţie. Fie $\mathcal{A}$ o algebră unitară involutivă. Spunem că elementul $T \in \mathcal{A}$ este *normal* dacă $TT^* = T^*T$. Un element $U \in \mathcal{A}$ se numeşte *unitar* dacă $UU^* = U^*U = I$. Un element $A \in \mathcal{A}$ este *autoadjunct* dacă $A^* = A$. O *proiecţie* este un element $P \in \mathcal{A}$ astfel încât $P^2 = P$.

Teorema 5.15 *Fie $\mathcal{A}$ o algebră unitară involutivă. Atunci, pentru orice $T \in \mathcal{A}$,*

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Demonstraţie. Ţinând cont de a doua observaţie de mai sus, avem $\lambda \in \sigma(T^*) \Leftrightarrow \lambda I - T^* \in \mathcal{G}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (\lambda I - T^*)^* = \overline{\lambda} I - T \in \mathcal{G}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T)$.

Teorema 5.16 *Fie $\mathcal{A}$ o C^*-algebră. Atunci,*
1) Dacă $U \in \mathcal{A}$, U unitar, $\sigma(U) \subset \{\lambda \in C \mid |\lambda| = 1\}$;
2) Dacă $A \in \mathcal{A}$, A autoadjunct, $\sigma(A) \subset R$;
3) Pentru orice $T \in \mathcal{A}$, T normal, $\|T\|_\sigma = \|T\|$.

Demonstraţie. 1) Dacă U este unitar, $\|U\| = \|U^*\| = 1$. Rezultă că $\sigma(U) \subset \overline{B}(0,1)$, deci dacă $\lambda \in \sigma(U)$, $|\lambda| \leq 1$. Pe de altă parte, deoarece $U^* = U^{-1}$, $\sigma(U^*) = \{1/\lambda \mid \lambda \in \sigma(U)\} \subset \overline{B}(0,1)$ şi, prin urmare, pentru orice $\lambda \in \sigma(U)$, $\frac{1}{|\lambda|} \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 1$. Concluzionăm, că $\sigma(U) \subset \{\lambda \in C \mid |\lambda| = 1\}$.

2) Să notăm mai întâi că pentru orice $\alpha \in C$, $\sigma(T + \alpha I) = \sigma(T) + \alpha$. Cu aceasta, avem că dacă $a+bi \in \sigma(T)$ $(a, b \in R)$, atunci, pentru $r \in R$ arbitrar, numărul complex $a+bi+ri$ se află în $\sigma(T)+ri = \sigma(T+riI) \subset \overline{B}(0, \|T+riI\|)$. Avem că,

$$|a+bi+ri|^2 \leq \|T+riI\|^2 = \|(T+riI)(T+riI)^*\| = \|T^2 - r^2 I\| \leq \|T\|^2 + r^2$$

deci,

$$2br \leq \|T\|^2 - a^2, \quad \forall r \in R,$$

ceea ce atrage după sine $b = 0$.

3) Dacă T este normal, am arătat (în demonstraţia Propoziţiei 4.12) că $\|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\|$, $\forall n \in N$ şi deoarece $\|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \|T\|_\sigma$, totul este clar.

Ţinând cont că $\mathcal{B}(X)$ (unde X este spaţiu Hilbert) este o C^*−algebră, toate rezultatele de mai sus pot fi transcrise pentru operatori liniari şi continui pe spaţii Hilbert:

Teorema 5.17 *Fie X spaţiu Hilbert. Atunci,*

1) $\forall T \in B(X)$, $\sigma(T) \neq \emptyset$; $\sigma(T)$ este o mulţime compactă conţinută în $\overline{B}(0, \|T\|_\sigma)$;

2) $\forall T \in B(X)$, $\rho(T)$ este o mulţime deschisă în C;

3) Dacă $0 \notin \sigma(T)$, $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$;

4) $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$;

5) Pentru orice operator unitar U, $\sigma(U) \subset \{\lambda \in C \mid |\lambda| = 1\}$;

6) Pentru orice A operator autoadjunct, $\sigma(T) \subset R$;

7) Dacă T este normal, $\|T\|_\sigma = \|T\|$.

5.3 Spectru punctual. Proprietăţi spectrale ale operatorilor autoadjuncţi

În această secţiune X este spaţiu Hilbert peste corpul $K = R, C$.

Definiţie. Pentru orice $T \in \mathcal{B}(X)$, *spectrul punctual* al lui T, $\sigma_p(T)$, este mulţimea

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in K \mid \lambda I - T \text{ nu este injectiv}\}.$$

În mod evident $\sigma_p(T)$ este conţinut în $\sigma(T)$, $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Din definiţie observăm că $\lambda \in \sigma_p(T)$, dacă şi numai dacă există $x \neq 0$ astfel încât $(\lambda I - T)x = 0$, sau, echivalent, subspaţiul Ker $(\lambda I - T) \neq \{0\}$. Un număr λ în $\sigma_p(T)$ se numeşte *valoare proprie* a lui T, iar elementele *nenule* din Ker $(\lambda I - T)$ se numesc *vectori proprii* corespunzători valorii proprii λ.

Observaţie. Dacă $X = K^n$, cum pe spaţii liniare finit dimensionale un operator liniar este injectiv dacă şi numai dacă este bijectiv, rezultă că, pentru orice $T \in \mathcal{L}(K^n)$, $\sigma_p(T) = \sigma(T)$. În plus, $\lambda \in \sigma(T)$, dacă şi numai dacă *det* $(\lambda I - T) = 0$, adică λ este rădăcină a acestei ecuaţii algebrice.

Lema 5.18 *Fie $(\lambda_n)_n$ un şir de valori proprii diferite două câte două, $\lambda_n \neq \lambda_m$, $\forall m \neq n$ şi $x_n \in \mathrm{Ker}(\lambda_n I - T)\setminus\{0\}$, $\forall n \in N$. Atunci, mulţimea formată din termenii şirului $(x_n)_n$ este liniar independentă.*

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie. Pentru $n = 1$, cum orice element nenul formează el însuşi o mulţime liniar independentă, afirmaţia este dovedită. Să presupunem că ea este adevărată pentru orice număr natural n. Fie λ_{n+1} o valoare proprie, $\lambda_{n+1} \neq \lambda_m$, $\forall m = 1, 2, ...n$ şi $x_{n+1} \in \mathrm{Ker}(\lambda_{n+1} I - T)$. Dacă mulţimea $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$ ar fi liniar dependentă, ar exista $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ (nu toţi zero) astfel încât

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

deci, $T(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(x_k)$, adică

$$\lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k x_k.$$

Combinând aceste două relaţii, rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_{n+1} - \lambda_k) x_k = 0,$$

egalitate în care nu toţi coeficienţii sunt zero, ceea ce înseamnă că muţimea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ este liniar dependentă (contradicţie).

Observaţie. Dacă $(\lambda_n)_n$ este un şir de valori proprii astfel încât $\lambda_n \neq \lambda_m$, $\forall m \neq n$ şi $x_n \in \mathrm{Ker}(\lambda_n I - T)\setminus\{0\}$, $\forall n \in N$, să notăm, pentru orice număr natural n arbitrar fixat cu X_n subspaţiul liniar generat de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Cu lema precedentă rezultă imediat că $\forall n \in N$, X_n este strict conţinut în X_{n+1}.

Rezultatele de mai jos se referă la operatori T autoadjuncţi, $T = T^*$.
Propoziţia 5.19 *Fie T operator autoadjunct pe spaţiul Hilbert X. Spectrul punctual al lui T, $\sigma_p(T)$ este conţinut în intervalul $[m_T, M_T]$, şi, pentru orice $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$, subspaţiile* Ker $(\lambda I - T)$ *şi* Ker $(\mu I - T)$ *sunt ortogonale.*
Demonstraţie. Pentru $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\exists x \neq 0$, astfel încât

$$\lambda < x, x > = < Tx, x > .$$

Atunci,

$$m_T \leq \inf_{x \neq 0} \frac{< Tx, x >}{< x, x >} \leq \lambda \leq \sup_{x \neq 0} \frac{< Tx, x >}{< x, x >} = M_T.$$

Acum, dacă $x \in$ Ker $(\lambda I - T)$ şi $y \in$ Ker $(\mu I - T)$ avem

$$\lambda < x, y > = < \lambda x, y > = < Tx, y > = < x, Ty > = < x, \mu y > = \mu < x, y >,$$

ceea ce arată, deoarece $\lambda \neq \mu$, că $< x, y > = 0$. Am justificat deci că Ker $(\lambda I - T) \perp$ Ker $(\mu I - T)$.
Propoziţia 5.20 *Fie T operator autoadjunct pe spaţiul Hilbert X. Atunci, $\lambda \in \sigma_p(T)$ dacă şi numai dacă $\overline{(\lambda I - T)(X)} \neq X$.*
Demonstraţie. Pentru λ în $\sigma_p(T)$, Ker $(\lambda I - T) \neq \{0\}$ sau, echivalent, Ker $(\lambda I - T)^\perp \neq X$. Deoarece Ker $(\lambda I - T)^\perp = \overline{(\lambda I - T)^*(X)}$ şi $\lambda I - T$ autoadjunct, rezultă că $\overline{(\lambda I - T)(X)} \neq X$. Reciproc, deoarece $\overline{(\lambda I - T)(X)} \neq X$, $\exists x_o \neq 0$, $x_o \in \overline{(\lambda I - T)(X)}^\perp =$ Ker $(\lambda I - T)^* =$ Ker $(\overline{\lambda} I - T)$. Prin urmare $\overline{\lambda} x_o = T x_o$, adică $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Cum ştim că $\sigma_p(T) \subset R$, avem $\lambda = \overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$.

Observaţie. Dacă $T \in \mathcal{B}(X)$, *spectrul rezidual* al lui T este definit prin

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in K \mid \lambda I - T \text{ este injectiv şi } \overline{(\lambda I - T)(X)} \neq X\}.$$

Propoziţia precedentă arată că dacă T este autoadjunct, atunci spectrul său rezidual este vid.
Propoziţia 5.21 *Fie T operator autoadjunct pe spaţiul Hilbert X. Atunci, $\lambda \in \rho(T)$ dacă şi numai dacă există $\mu > 0$ astfel încât $\|(\lambda I - T)x\| \geq \mu \|x\|$, $\forall x \in X$.*
Demonstraţie. Să presupunem că $\lambda \in \rho(T)$, adică există $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Cum $\lambda I - T$ este mărginit, $\exists M > 0$ astfel încât

$$\|(\lambda I - T)x\| \leq M \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Punând aici $x = (\lambda I - T)^{-1}y$, obţinem

$$\mu\|x\| \leq \|(\lambda I - T)x\|, \quad \forall x \in X, \text{ (unde } \mu = \frac{1}{M}).$$

Reciproc, dacă există $\mu > 0$ astfel încât $\|(\lambda I - T)x\| \geq \mu\|x\|$, $\forall x \in X$, $\lambda I - T$ este injectiv. Atunci, $\lambda \notin \sigma_p(T)$, şi, conform Propoziţiei 5.20, $\overline{(\lambda I - T)(X)} = X$. Rezultă că pentru orice $y \in X$, $\exists (x_n)_n \subset X$ astfel încât $y_n = \lambda x_n - T x_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} y$. Prin urmare,

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\mu}\|y_n - y_m\|,$$

deci $(x_n)_n$ este şir Cauchy, ceea ce înseamnă, deoarece X este complet, că $\exists x = \lim\limits_n x_n$. Concluzionăm că $y = \lambda x - Tx$. Am dovedit că $\lambda I - T$ este surjectiv, şi cum el este şi injectiv, este inversabil.

O consecinţă imediată a acestei teoreme este următorul corolar.

Corolarul 5.22 *Fie T operator autoadjunct pe spaţiul Hilbert X. Atunci, $\lambda \in \sigma(T)$ dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_n$, cu $\|x_n\| = 1$ astfel încât $\lambda x_n - T x_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.*

Propoziţia 5.23 *Orice operator autoadjunct T are spectrul conţinut în intervalul $[m_T, M_T]$ şi m_T, M_T se află în $\sigma(T)$.*

Demonstraţie. Să presupunem mai întâi că $\lambda < m_T$, adică $m_T - \lambda > 0$. Cum pentru orice x arbitrar în X avem

$$< (T - \lambda I)x, x > = < Tx, x > - \lambda < x, x > \geq (m_T - \lambda)\|x\|^2,$$

rezultă că $T - \lambda I \in \mathcal{A}_+(X)$. Atunci, cu inegalitatea Cauchy-Schwarz obţinem

$$\|(T - \lambda I)x\| \cdot \|x\| \geq < T - \lambda I)x, x > \geq (m_T - \lambda)\|x\|^2, \ \forall x \in X,$$

şi folosind Propoziţia 5.21, $\lambda \in \rho(T)$.

Similar, dacă $\lambda > M_T$, adică $\lambda - M_T > 0$, operatorul $\lambda I - T$ este pozitiv, deoarece

$$< (\lambda I - T)x, x > = \lambda < x, x > - < Tx, x > \geq (\lambda - M_T)\|x\|^2$$

şi, cu acelaşi argument ca mai înainte, obţinem

$$\|(\lambda I - T)x\| \cdot \|x\| \geq < (\lambda I - T)x, x > \geq (\lambda - M_T)\|x\|^2, \ \forall x \in X,$$

deci $\lambda \in \rho(T)$.

Am demonstrat până acum că $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$. Mai departe să justificăm că $m_T \in \sigma(T)$. Deoarece $m_T = \inf\limits_{\|x\|=1} < Tx, x >$, există un şir $(x_n)_n$, cu $\|x_n\| = 1$ astfel încât $< Tx_n, x_n > \longrightarrow m_T$, când $n \to \infty$. Dacă verificăm că $(m_T I - T)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, cu Corolarul 5.22, rezultă $m_T \in \sigma(T)$. În următorul calcul se foloseşte inegalitatea Cauchy-Schwarz generalizată corespunzătoare operatorului pozitiv $T - m_T I$. Atunci,

$$\|(T - m_T I)x_n\|^4 = < (T - m_T I)x_n, (T - m_T I)x_n >^2 \leq$$

$$\leq < (T - m_T I)x_n, x_n > \cdot < (T - m_T I)^2 x_n, (T - m_T I)x_n > \leq$$
$$\leq < (T - m_T I)x_n, x_n > \cdot \|T - m_T I\| \cdot \|(T - m_T I)x_n\|^2,$$

ceea ce, ţinând cont că $< (T - m_T I)x_n, x_n > \overset{n}{\longrightarrow} 0$, arată că şirul $((m_T I - -T)x_n)_n$ converge la zero.

Similar, $M_T \in \sigma(T)$.

Observaţie. Cu această propoziţie, rezultă că dacă T este operator autoadjunct pozitiv, spectrul lui T şi deci şi spectrul punctual conţin numai numere pozitive.

5.4 Proprietăţi spectrale ale operatorilor compacţi şi autoadjuncţi

Pentru a obţine o descriere completă a spectrului operatorilor compacţi şi autoadjuncţi pe spaţii Hilbert, vom demonstra mai întâi un rezultat privind spectrul operatorilor compacţi definiţi pe spaţii Hilbert. Menţionăm însă că următoarea propoziţie ramâne adevărată şi dacă X este numai spaţiu Banach.

Propoziţia 5.24 *Dacă T este un operator compact pe spaţiul Hilbert X, spectrul punctual al lui T, $\sigma_p(T)$ este o mulţime cel mult numărabilă, având ca unic posibil punct de acumulare pe zero.*

Demonstraţie. Să presupunem că există un punct de acumulare nenul al spectrului punctual al operatorului T, fie acesta $\lambda_o \neq 0$. Atunci, $\exists(\lambda_n)_n \subset \sigma_p(T)$, $\lambda_n \neq \lambda_m$, $\lambda_n \overset{n}{\longrightarrow} \lambda_o$. Fie $(x_n)_n$ un şir de vectori proprii corespunzători valorilor $(\lambda_n)_n$, $x_n \in \text{Ker } (\lambda_n I - T), \forall n$. Să notăm cu X_n subspaţiul liniar al lui X generat de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Este clar că X_n este închis (pentru că este finit dimensional) şi că X_n strict inclus în X_{n+1}. Pentru fiecare număr natural

n, cum $X_{n-1} \subsetneq X_n$, cu Teorema Proiecţiei, obţinem că există $x_n^o \in X_n \cap X_{n-1}^{\perp}$, $\|x_n^o\| = 1$. Prin urmare, pentru orice $x \in X_{n-1}$,

$$\|x_n^o - x\|^2 = < x_n^o - x, x_n^o - x > = \|x_n^o\|^2 - < x_n^o, x > - < x, x_n^o > + \|x\|^2 =$$

$$= \|x_n^o\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x_n^o\|^2 = 1,$$

deci $\|x_n^o - x\| \geq 1$, $\forall x \in X_{n-1}$.

Acum, să considerăm şirul $(\frac{1}{\lambda_n} x_n^o)_n$, care, deoarece $\lambda_n \xrightarrow{n} \lambda_o \neq 0$, este mărginit. Vom arăta că şirul $(T(\frac{1}{\lambda_n} x_n^o))_n$ nu conţine subşiruri convergente. Într-adevăr, pentru orice n, $x_n^o \in X_n$, deci,

$$x_n^o = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \ (\alpha_k \in K),$$

ceea ce implică

$$\alpha_n x_n = x_n^o - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k,$$

şi aplicând T,

$$T x_n^o = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k x_k.$$

Rezultă că

$$\frac{1}{\lambda_n} T x_n^o = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \frac{\lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n.$$

Atunci, pentru un element arbitrar $x \in X_{n-1}$, obţinem

$$\|\frac{1}{\lambda_n} T x_n^o - x\| = \|\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \frac{\lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n - x\| =$$

$$= \|\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \frac{\lambda_k}{\lambda_n} x_k + x_n^o - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k - x\| = \|x_n^o - (\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}) x_k + x)\| \geq 1,$$

deoarece $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}) x_k + x \in X_{n-1}$. Ţinând cont că $\frac{1}{\lambda_{n-1}} T x_{n-1}^o \in X_{n-1}$, punând în formula de mai sus $x \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda_{n-1}} T x_{n-1}^o$, rezultă că

$$\|\frac{1}{\lambda_n} T x_n^o - \frac{1}{\lambda_{n-1}} T x_{n-1}^o\| \geq 1,$$

şi cum pentru $m < n - 1$, X_m este conţinut în X_{n-1}, avem

$$\|\frac{1}{\lambda_n}Tx_n^o - \frac{1}{\lambda_m}Tx_m^o\| \geq 1,$$

ceea ce arată că $(T(\frac{1}{\lambda_n}x_n^o))_n$ nu are subşiruri convergente (contradicţie cu faptul că operatorul T este compact).

În consecinţă, am dovedit că dacă spectrul punctual al lui T are un punct de acumulare, acesta nu poate fi decât zero. Mai departe, observăm că

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\lambda \in K \mid \frac{1}{n+1}\|T\| \leq |\lambda| \leq \frac{1}{n}\|T\|\}\bigcup\{0\},$$

deci,

$$\sigma_p(T) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\lambda \in \sigma_p(T) \mid \frac{1}{n+1}\|T\| \leq |\lambda| \leq \frac{1}{n}\|T\|\}\bigcup\{0\}.$$

Fiecare mulţime $\{\lambda \in \sigma_p(T) \mid \frac{1}{n+1}\|T\| \leq |\lambda| \leq \frac{1}{n}\|T\|\}$, $(n \in N)$, este finită (în caz contrar, dacă ar fi nevidă, ar fi infinită şi mărginită, deci ar avea un punct de acumulare, în mod necesar nenul, ceea ce contrazice prima parte a demonstarţiei). Concluzionăm că $\sigma_p(T)$, fiind conţinut într-o reuniune numărabilă de mulţimi finite, deci într-o mulţime (cel mult) numărabilă, este el însuşi o mulţime (cel mult) numărabilă.

Propoziţia 5.25 *Fie T operator compact şi autoadjunct pe spaţiul Hilbert X. Atunci, fiecare $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$ se află în $\sigma_p(T)$, deci $\sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$.*

Demonstraţie. Pentru $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$ există un şir $(x_n)_n$, $\|x_n\| = 1$ astfel încât $\lambda x_n - Tx_n \xrightarrow{n} 0$. Deoarece T este compact, şirul $(x_n)_n$ conţine un subşir $(x_{n'})_{n'}$ astfel încât $(Tx_{n'})_{n'}$ este convergent. Atunci,

$$x_{n'} = \frac{1}{\lambda}(\lambda x_{n'} - Tx_{n'}) + \frac{1}{\lambda}Tx_{n'}$$

converge. Fie x limita sa. Cum $\|x_{n'}\| = 1$ rezultă că $x \neq 0$ şi, deoarece $\lambda x_{n'} - Tx_{n'} \xrightarrow{n} 0$, obţinem că $\lambda x = Tx$, adică $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Observaţie. Cum spectrul oricărui operator compact definit pe un spaţiu de dimensiune infinită conţine numărul zero, teorema precedentă ne asigură că dacă X este spaţiu Hilbert de dimensiune infinită şi $T \in \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{A}(X)$,

$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

Corolarul 5.26 *Orice operator compact şi autoadjunct nenul pe un spaţiu Hilbert, $T \neq 0$, are cel puţin o valoare proprie nenulă ($\exists\ \lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma_p(T)$).*

Demonstraţie. Deoarece $T \neq 0$, $\|T\| = \max(|m_T|, |M_T|) \neq 0$, deci cel puţin unul dintre numerele m_T, M_T este diferit de zero. Conform Propoziţiei 5.23, m_T, $M_T \in \sigma(T)$, care, cu propoziţia precedentă este conţinut în $\sigma_p(T) \cup (0)$. Prin urmare, există $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$ (λ este oricare dintre numerele m_T, M_T, cu condiţia ca acesta să fie nenul).

Propoziţia 5.27 *Dacă T este operator compact, pentru orice valoare proprie nenulă, $\lambda \neq 0$, subspaţiul vectorilor proprii corespunzători lui λ, Ker $(\lambda I - T)$ are dimensiune finită.*

Demonstraţie. Dacă $\lambda \neq 0$, Ker $(\lambda I - T) =$ Ker $(I - \frac{1}{\lambda}T)$. Să notăm $T_1 = \frac{1}{\lambda}T$ şi N_1 subspaţiul închis Ker $(I - T_1)$. Este clar că operatorul T_1 este compact şi că $T_1(N_1) \subset N_1$. Dacă B_1 este bila unitate în $N_1, T_1(B_1) = B_1$. Deoarece B_1 este mărginită în X, $T_1(B_1) = B_1$ este relativ compactă în X, deci în N_1. Deoarece bila unitate a spaţiului liniar N_1 este relativ compactă, rezultă că N_1 este finit dimensional.

Vom prezenta acum unul dintre rezultatele fundamentale ale acestei secţiuni, care realizează o descriere completă a spectrului unui operator compact şi autoadjunct definit pe un spaţiu Hilbert.

Teorema 5.28 (Teorema Riesz-Schauder) *Fie T operator compact şi autoadjunct pe spaţiul Hilbert X. Atunci, spectrul lui T, $\sigma(T)$ este o mulţime numărabilă, cu zero singurul posibil punct de acumulare; orice element nenul $\lambda \in \sigma(T)$ este o valoare proprie de multiplicitate finită (adică, subspaţiul vectorilor proprii corespunzători lui λ, Ker $(\lambda I - T)$ are dimensiune finită).*

Demonstraţie. Totul rezultă din Propoziţiile 5.24, 5.25, 5.27.

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de *alternativa Fredholm* .

Teorema 5.29 *Fie T operator compact şi autoadjunct pe spaţiul Hilbert X şi $\lambda \in K\setminus\{0\}$. Atunci:*

1) Dacă $\lambda \notin \sigma_p(T)$, ecuaţia $(\lambda I - T)x = z$ are soluţie unică pentru orice $z \in X$.

2) Dacă $\lambda \in \sigma_p(T)$, ecuaţia $(\lambda I - T)x = z$ are soluţii dacă şi numai dacă $z \in (\mathrm{Ker}(\lambda I - T))^{\perp}$.

Demonstraţie. 1) Fie $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Conform Propoziţiei 5.25, $\lambda \notin \sigma(T)$, deci, $\lambda I - T$ este surjectiv şi injectiv, ceea ce înseamnă că pentru orice $z \in X$, există un element unic $x \in X$ astfel încât $(\lambda I - T)x = z$.

2) Fie $\lambda \in \sigma_p(T)$. În mod evident T(Ker $(\lambda I - T)) \subset$ Ker $(\lambda I - T)$, şi, deoarece T este autoadjunct, T(Ker $(\lambda I - T)^{\perp}) \subset$ Ker $(\lambda I - T)^{\perp}$. Să

considerăm T_1 restricţia operatorului T la subspaţiul Ker $(\lambda I - T)^\perp$, T_1 : Ker $(\lambda I-T)^\perp \to$ Ker $(\lambda I-T)^\perp$. Dacă $\lambda \in \sigma(T_1)$, $\exists x_o \neq 0$, $x_o \in$ Ker $(\lambda I-T)^\perp$ astfel încât $Tx_o = \lambda x_o$, deci $x_o \in$ Ker $(\lambda I - T)$ (contradicţie). Prin urmare $\lambda \notin \sigma(T_1)$, sau, echivalent, $\lambda I - T_1$ este inversabil pe Ker $(\lambda I - T)^\perp$, ceea ce dovedeşte că $\forall z \in$ (Ker $(\lambda I - T))^\perp$, $\exists x \in$ (Ker $(\lambda I - T))^\perp$ astfel încât $(\lambda I - T)x = z$. Reciproc, dacă ecuaţia $(\lambda I - T)x = z$ are soluţia $x \in X$, avem $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in$ Ker $(\lambda I - T)$, $x_2 \in$ Ker $(\lambda I - T)^\perp$. Atunci $z = (\lambda I - T)(x_1 + x_2) = (\lambda I - T)(x_2) \in$ Ker $(\lambda I - T)^\perp$.

În cele ce urmează, T este operator compact şi autoadjunct pe spaţiul Hilbert X. Conform Teoremei Riesz-Schauder, mulţimea $\sigma_p(T)\backslash\{0\}$ este o mulţime numărabilă nevidă. Prin urmare, ordonând-o, o putem considera ca fiind şirul $(\lambda_n)_n$, în care o valoare proprie se va repeta de un număr de ori egal cu multiplicitatea sa (dimensiunea subspaţiului liniar al vectorilor proprii corespunzător ei). În fiecare astfel de subspaţiu vom alege o bază ortonormală. Cum, dacă $\lambda_n \neq \lambda_m$, Ker $(\lambda_n I-T)\perp$ Ker $(\lambda_m I-T)$, rezultă că, mulţimea formată din toate elementele bazelor ortonormale ale subspaţiilor de vectori proprii corespunzători şirului de valori proprii $(\lambda_n)_n$, este un şir ortonormal de vectori proprii, fie acesta $(x_n)_n$, $x_n \in$ Ker $(\lambda_n I - T)$, $\forall n \in N$. Odată fixate notaţiile, prezentăm teorema de reprezentare spectrală a operatorilor compacţi şi autoadjuncţi.

Teorema 5.30 (Teorema Hilbert-Schmidt) *Pentru orice* $x \in X$,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n > x_n.$$

Demonstraţie. Să notăm cu Y subspaţiul liniar generat de $(x_n)_n$. Demonstrăm că $Y^\perp =$ Ker T.

Incluziunea Ker $T \subset Y^\perp$ este clară dacă T este injectiv; în caz contrar, $0 \in \sigma_p(T)$, şi deoarece $\lambda_n \neq 0$, $\forall n \in N$, rezultă Ker $T \perp$ Ker $(\lambda_n I - T)$, $\forall n \in N$, deci, $\forall x \in$ Ker T este ortogonal pe Y, adică $x \in Y^\perp$.

Pentru incluziunea inversă, notăm mai întâi că, deoarece $(x_n)_n$ sunt toţi vectori proprii, $T(Y) \subset Y$, deci, T fiind autoadjunct, $T(Y^\perp) \subset Y^\perp$. Să considerăm T_1 restricţia lui T la $Y^\perp$, $T_1 : Y^\perp \to Y^\perp$. Dacă $T_1 \neq 0$, deoarece T_1 este compact şi autoadjunct pe spaţiul Hilbert $Y^\perp$, rezultă, conform Corolarului 5.26, că el are o valoare proprie $\lambda \neq 0$. Prin urmare, există $x_\lambda \in Y^\perp$, $x_\lambda \neq 0$ astfel încât $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$. Atunci, $x_\lambda \in Y \cap Y^\perp$, şi deci $Y \cap Y^\perp \neq \{0\}$ (contradicţie). Concluzionăm că $T_1 = 0$, adică restricţia la $Y^\perp$ a lui T este operatorul nul, sau echivalent, $Y^{\perp} \subset \text{Ker } T$.

Atunci, orice $x \in X$ poate fi scris în mod unic că $x = x_o + y$, unde $x_o \in \text{Ker } T = Y^{\perp}$ şi $y \in \overline{Y}$. În plus, deoarece $(x_n)_n$ este o mulţime ortonormală în $\overline{Y}$ astfel încât închiderea spaţiului liniar generat de ea coincide cu $\overline{Y}$, rezultă că $(x_n)_n$ este o bază ortonormală pentru spaţiul Hilbert $\overline{Y}$, prin urmare

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} < y, x_n > x_n = \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n.$$

Atunci,

$$Tx = T(x_o + \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > x_n) = Tx_o + \sum_{n=1}^{\infty} < x, x_n > Tx_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n > x_n$$

Observaţii 1. Dacă $\sigma_p(T) \backslash \{0\}$ este infinită, şirul numeric $(\lambda_n)_n$ converge la zero. Într-adevăr, în caz contrar, ar exista un subşir al său $\lambda_{n'} \xrightarrow{n'} \lambda_o \neq 0$. Deoarece $(x_{n'})_{n'}$, şirul vectorilor proprii corespunzători valorilor $(\lambda_{n'})_{n'}$, este şir mărginit, el conţine un subşir $(x_{n''})_{n''}$ astfel încât $T(x_{n''}) = \lambda_{n''} x_{n''}$ este convergent. Rezultă că $(x_{n''})_{n''}$ este convergent (contradicţie, deoarece $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$). Când $X = K^n$, $\sigma_p(T)$ este finită.

2. Teorema precedentă arată că orice operator compact şi autoadjunct pe un spaţiu Hilbert este diagonalizabil. În cazul particular al spaţiului K^n, rezultă că orice matrice hermitiană este diagonalizabilă (scrierea unei matrici în forma descrisă de teorema de mai sus fiind cunoscută sub numele de forma canonică Jordan).

Capitolul 6

Metode numerice pentru rezolvarea sistemelor liniare

Fie $A \in \mathcal{L}(K^n)$ o matrice, unde K este corpul numerelor reale sau corpul numerelor complexe. Notăm $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$. Pentru $b = (b_i)_{1 \le i \le n} \in K^n$, se pune problema determinării unui vector $x = (x_i)_{1 \le i \le n} \in K^n$, astfel încât

$$(1) \qquad Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,n}.$$

Relaţia (1) se numeşte *sistem de ecuaţii liniare*, determinat de matricea A şi x se numeşte *soluţia sistemului* (1).

Metodele de determinare a soluţiei sistemului (1) se numesc metode de rezolvare ale sistemului şi se împart în *metode directe* şi *metode iterative*.

6.1 Metode directe

Metodele directe permit rezolvarea sistemului (1), obţinându-se soluţia exactă a sistemului după un număr finit de operaţii elementare (adunare, înmulţire, împărţire şi rădăcină pătrată), efectuate asupra elementelor lui A şi b. O metodă directă este mai bună cu cât numărul operaţiilor elementare folosite este mai mic, deoarece aceste operaţii aduc erori de calcul şi de maşină.

Metoda de rezolvare a sistemului (1), cu formulele lui Cramer, nu este avantajoasă, deoarece se efectuează un număr mare de operaţii elementare. Numărul total de operaţii elementare folosit în rezolvarea unui sistem de n

ecuaţii şi n necunoscute este $T=(n+1)(nn!-1)$, deoarece pentru calculul unui determinant sunt necesare $(n-1)n!$ înmulţiri şi $n!-1$ adunări.

6.1.1 Metoda lui Gauss a eliminării

Metoda lui Gauss a eliminării de rezolvare a sistemului (1), pentru care $\det A \neq 0$, constă în transformarea sistemului într-un sistem echivalent, având matricea sistemului superior triunghiulară. Transformarea se realizează în n paşi.

Primul pas constă în eliminarea necunoscutei x_1, din ecuaţiile sistemului, începând cu a doua, dupa ce se consideră primă ecuaţie, ecuaţia care are drept coeficient pentru x_1, elementul al cărui modul realizează maximul modulelor elementelor din prima coloană a matricii A. Acest element se numeşte *pivot*, iar linia corespunzătoare în matrice, *linie pivot*.

După permutarea ecuaţiilor sistemului, acesta devine:

(2) $$A^{(0)}x=b^{(0)};A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}};b^{(0)}=(a_{jn+1}^{(0)})_{1\le j\le n};\left|a_{11}^{(0)}\right|=\max_{1\le j\le n}\left|a_{j1}\right|.$$

Sistemul (2) se transformă astfel, prima ecuaţie se împarte cu pivotul $a_{11}^{(0)}\neq 0$, iar din celelalte ecuaţii se elimină x_1. Obţinem astfel un sistem echivalent

(3) $$A^{(1)}x=b^{(1)};A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}};b^{(1)}=(a_{jn+1}^{(1)})_{1\le j\le n}$$

unde

$$a_{11}^{(1)}=1;a_{1j}^{(1)}=\frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}};a_{i1}^{(1)}=0;a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(0)}-a_{i1}^{(0)}a_{1j}^{(1)};j=\overline{2,n+1};i=\overline{2,n}.$$

Se permută apoi ecuaţiile sistemului, începând cu a doua ecuaţie, astfel încât în matricea asociată sistemului, elementul de pe poziţia (2,2), să fie elementul al cărui modul realizează maximul modulelor elementelor din prima coloană a matricii $A^{(1)}$, începând cu linia a doua.În continuare, se repetă procedeul de eliminare a necunoscutei x_2 în sistemul format de ultimile n-1 ecuaţii ale sistemului (3), a cărui matrice e nesingulară, deoarece avem

$$\left|\det A^{(1)}\right| = \frac{\left|\det A\right|}{\left|a_{11}^{(0)}\right|}.$$

Prin recurență la pasul $k \geq 2$ se obține sistemul

(4) $$A^{(k)}x = b^{(k)};\ A^{(1)} = (a_{ij}^{(k)})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}};\ b^{(k)} = (a_{jn+1}^{(k)})_{1\le j\le n}$$

unde

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)};\ i = \overline{1,k-1};\ j = \overline{1,k-1}$$

$$a_{kk}^{(k)} = 1;\ a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};\ a_{ik}^{k} = 0;\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)};\ j = \overline{k+1,n+1};\ i = \overline{k+1,n}$$

După n pași se obține un sistem echivalent cu (1), având matricea superior triunghiulară, $A^{(n)}x = b^{(n)}$. Acest sistem se rezolvă, începând cu ultima ecuație

(5) $$x_n = a_{nn+1}^{(n)};\ x_k = a_{kn+1}^{(n)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(n)}x_j;\ k = \overline{n-1,1}.$$

Observăm că $\left|\det A\right| = \left|a_{11}^{(0)}\ldots a_{nn}^{(n-1)}\right|$.

Numărul de operații elementare, folosit la trecerea de la matricea $A^{(k-1)}$ la $A^{(k)}$ este de $n-k+1$ împărțiri, $(n-k+1)(n-k)$ înmulțiri și $(n-k+1)(n-k)$ adunări. Numărul total de operații elementare este

$$T = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(n-k) + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k) = \frac{4n^3+9n^2-7n}{6}$$

unde $2\sum_{k=1}^{n}(n-k)$, reprezintă numărul operațiilor de adunare și înmulțire folosit în rezolvarea sistemului triunghiular.

6.1.2 Metoda Cholesky

Fie $A \in \mathcal{L}(C^n)$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.

Teorema 6.1 *Sunt echivalente afirmațiile:*
(i) Matricea A este autoadjunctă și pozitiv definită în raport cu produsul scalar euclidian.

(ii) Matricea A este autoadjunctă și $\Delta_k > 0, k = \overline{1,n}$ *unde*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1k} \\ a_{21} & & a_{2k} \\ . & & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

(iii) Există $B \in \mathcal{L}(C^n)$, *B matrice inferior triunghiulară, nesingulară astfel încât* $A = BB^*$.

Demonstrație. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Se demonstrează prin recurență după n. Pentru $n = 1$ avem $\langle Ax, x\rangle = a_{11}|x|^2 > 0, x \neq 0$. Prin urmare $\Delta_1 = a_{11} > 0$. Presupunem propoziția adevărată pentru matrici de dimensiune n-1. Descompunem matricea A astfel: $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & y \\ y^* & a_{nn} \end{pmatrix}$, unde $y^* = (\overline{a_{1n}}, \ldots, \overline{a_{n-1n}})$. Matricea A_{n-1} este autoadjunctă. Pentru $x = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} \in C^n, x' \in C^{n-1}, x' \neq 0$ avem

$$\langle Ax, x\rangle > 0 \Rightarrow \langle A_{n-1}x', x'\rangle > 0.$$

Prin urmare A este și pozitiv definită. Conform ipotezei de inducție $\Delta_k > 0, k = \overline{1, n-1}$. Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A atunci $\Delta_n = \lambda_1 \ldots \lambda_n > 0$. (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Se demonstrează prin inducție completă după n. Pentru $n = 1$ avem $B = (b) = (\sqrt{a_{11}})$. Presupunem propoziția adevărată pentru matrici de dimensiune n-1. Descompunem matricea A astfel: $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & y \\ y^* & a_{nn} \end{pmatrix}$, unde $y^* = (\overline{a_{1n}}, \ldots, \overline{a_{n-1n}})$. Matricea A_{n-1} îndeplinește condițiile din ipoteză. Există $B_{n-1} \in \mathcal{L}(C^n)$, inferior triunghiulară, nesingulară, astfel încât $A_{n-1} = B_{n-1}B_{n-1}^*$. Construim $B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ x^* & a \end{pmatrix}$, unde $x \in C^{n-1}$. Matricea B satisface condiția din enunț dacă demonstrăm că $|a|^2 = a_{nn} - y^* A_{n-1}{}^{-1} y > 0$. Fie

$T=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -y^* A_{n-1}{}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$, unde $I_{n-1} \in \alpha(C^{n-1})$ este matricea identitate. Avem $TA=\begin{pmatrix} A_{n-1} & y \\ 0 & a_{nn}-y^* A_{n-1}{}^{-1} y \end{pmatrix}$. Prin urmare $\det TA = \det A_{n-1}(a_{nn}-y^* A_{n-1}{}^{-1} y)$, de unde $a_{nn}-y^* A_{n-1}{}^{-1} y = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Avem adevărate relaţiile:

$$A^* = (BB^*)^* = (B^*)^* B^* = BB^* = A.$$

Pentru $x \in C^n, x \neq 0, \langle Ax, x\rangle = \langle BB^* x, x\rangle = \|B^* x\|^2 > 0$.

Observaţia 6.2 *Descompunerea dată de Teorema 6. 1. nu este unică.*

Presupunem că există două descompuneri pentru A în condiţiile teoremei: $A = BB^* = CC^*$. Atunci $C^{-1}B = C^*(B^*)^{-1}$. Cum $C^{-1}B$ este inferior triunghiulară şi $C^*(B^*)^{-1}$ este superior triunghiulară, există D o matrice diagonală astfel încât $C^{-1}B = C^*(B^*)^{-1} = D$. De aici avem:

$$B = CD, C^* = DB^*, B^* = D^* C^* \text{ şi } I = DD^*.$$

Prin urmare D este o matrice diagonala:

$$D = (e^{it_j}\delta_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le n}}, t_j \in R, j=\overline{1,n}.$$

Observaţia 6.3 *Notând* $B_k = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & & 0 \\ & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & & b_{kk} \end{pmatrix}, k=\overline{1,n}$, *unde* B_n *este matricea* B *din Teorema 6. 1., avem*

(6) $$|b_{11}|^2 = \Delta_1; |b_{kk}|^2 = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k=\overline{2,n}.$$

Este suficient să observăm că în condiţiile Teoremei 6. 1. avem

$$A_k = B_k B_k{}^*, \text{ unde } A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} \end{pmatrix}, k=\overline{1,n}.$$

Atunci

$$\det A_k = \det B_k \det B_k^* \Leftrightarrow \Delta_k = |b_{11}|^2 \ldots |b_{kk}|, k = \overline{1,n}$$

de unde relațiile (6).

Observația 6.4 *Elementele unei matrici B din Teorema 6. 1. se determină prin relațiile:*

$$(7)\qquad \begin{aligned} & b_{11} = \sqrt{a_{11}}; b_{j1} = \frac{a_{j1}}{b_{11}}, j = \overline{2,n} \\ & b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |b_{ik}|^2}, b_{ji} = \frac{1}{b_{ii}}(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{jk}\overline{b_{ik}}; j > i; \overline{j = 2,n} \end{aligned}$$

Relațiile se obțin prin identificarea elementelor în relația $A = BB^*$. Observăm că dacă $A \in \mathcal{L}(R^n)$, atunci $B \in \mathcal{L}(R^n)$.

Metoda lui Cholesky

Acest algoritm permite rezolvarea unui sistem (1), pentru care matricea A este autoadjunctă și pozitiv definită. A rezolva sistemul $Ax = b$ este echivalent cu a rezolva două sisteme $By = b, B^*x = y$, unul cu matrice inferior triunghiulară, celălat cu matrice superior triunghiulară, unde matricea B este dată de Teorema 6.1. Rezolvarea unor astfel de sisteme este directă și implică un număr mic de operații elemmentare.

Determinăm numărul de operații elementare necesar în rezolvarea unui sistem cu metoda Cholesky.

Numărul de operații elementare folosit în construcția lui B este de n radicali, $\frac{n(n-1)}{2}$ împărțiri, $\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(i-1)$ înmulțiri și tot atâtea adunări.

Pentru rezolvarea sistemului triunghiular avem nevoie de n împărțiri, $\sum_{i=1}^{n}(n-i)$ înmulțiri și tot atâtea adunări. Numărul total de operații elementare este:

$$T = n + \frac{n(n-1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(i-1) + 2n + 4\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{2n^3 + 15n^2 + n}{6}.$$

6.2 Metode iterative

A rezolva sistemul (1) printr-o metodă iterativă înseamnă a construi un şir de vectori $(x^k)_k \subset K^n$, care converge la soluţia $x \in K^n$ a sistemului considerat. În acelaşi timp este necesar să se evalueze o majorare a erorii $d_k = \|x - x^k\|, k \geq 0$, pe care o facem când aproximăm x cu x^k. O metodă iterativă este cu atât mai bună cu cât d_k este mai mic.

6.2.1 Metoda Jacobi

Fie $B \in \mathcal{L}(C^n)$, $b \in C^n$. Metoda Jacobi este o metodă iterativă de rezolvare a sistemului

(8) $$x - Bx = b.$$

Pentru $x^0 \in C^n$ considerăm şirul

(9) $$x^{k+1} = Bx^k + b, k \geq 0.$$

Şirul definit de (9) se numeşte *şirul Jacobi* ataşat sistemului (8).

Teorema 6. 5 *Pentru orice $b \in C^n$ sistemul* (8) *are soluţie unică z şi pentru orice $x^0 \in C^n$ şirul* (9) *converge către z dacă şi numai dacă $B^k \to 0$.*

În condiţiile teoremei, eroarea se evaluează prin

(10) $$\|x^k - z\| \leq \|B\| \cdot \|(I - B)^{-1}\| \cdot \|x^k - x^{k-1}\|, k \geq 1$$

(11) $$\|x^k - z\| \leq \|B^k\| \cdot \|(I - B)^{-1}\| \cdot \|x^1 - x^0\|, k \geq 1,$$

unde norma matricilor considerată este norma aplicaţiei liniare, subordonată normei vectoriale, folosită în C^n.

Demonstraţie. Presupunem că pentru orice $b \in C^n$ sistemul (8) are soluţie unică. Luam $b = 0$. Sistemul $x - Bx = 0$ are soluţia unică $z = 0$. Pentru orice $x^0 \in C^n$ şirul (9) este $x^k = Bx^{k-1} = \ldots = B^k x^0$. Conform ipotezei, $B^k x^0 \to 0$, pentru orice $x^0 \in C^n$. Din Observaţia 3. **(3.3)** avem $B^k \to 0$. Presupunem acum că $B^k \to 0$. Prin metoda reducerii la absurd presupunem că $I - B$ este singulară. Există $v \in C^n, v \neq 0$, astfel încât $(I - B)v = 0 \Leftrightarrow v = Bv$.

Iterând relația avem $v = B^k v \to 0$, de unde $v = 0$. Contradicție. Pentru a arăta convergența șirului (9) calculăm

$$x^k - z = Bx^{k-1} + b - z = B(x^{k-1} - z)$$

Iterând relația avem $x^k - z = B^k(x^0 - z) \to 0$.
Pentru evaluările erorii calculăm

$$(I - B)(x^k - z) = x^k - Bx^k + Bz - z = x^k - Bx^k - b = x^k - x^{k+1}$$
$$x^k - z = (I - B)^{-1}(x^k - x^{k+1})$$
$$x^k - x^{k+1} = B(x^{k-1} - x^k) = \ldots = B^k(x^0 - x^1)$$

de unde avem inegalitățile

$$\|x^k - z\| = \|(I - B)^{-1} B(x^{k-1} - x^k)\| \le \|(I - B)^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot \|x^k - x^{k-1}\|$$
$$\|x^k - x^{k+1}\| \le \|B^k\| \cdot \|x^0 - x^1\|$$

Observația 6.6 *Dacă* $\|B\| = q < 1$, *Teorema 6. 5. se poate aplica, deoarece* $\|B^k\| \le q^k \to 0$. *Evaluările erorii au forma:*

(12) $$\|x^k - z\| \le \frac{q}{1-q}\|x^k - x^{k-1}\|, k \ge 1$$

(13) $$\|x^k - z\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|, k \ge 1$$

deoarece $\|(I - B)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1 - \|B\|} = \dfrac{1}{1-q}$.

Observația 6.7 *Fie* $A \in \mathcal{L}(C^n)$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$. *Pentru* $d \in C^n$ *considerăm sistemul* $Ax = d$. *Dacă este îndeplinită relația*

(14) $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1,n}$$

sistemul $x - Bx = b, B = I - D^{-1}A, b = D^{-1}d$, *unde D este matricea diagonală a lui A, este echivalent cu sistemul* $Ax = d$ *şi conform* Observației 6.6, *sistemului i se poate aplicaTeorema 6. 5.*

Este suficient să observăm că $\|B\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \dfrac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = q < 1$.(**3.1**, exemplul 4).

Observaţia 6.8 *Fie* $A \in \mathcal{L}(C^n)$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$. *Pentru* $d \in C^n$ *considerăm sistemul* $Ax = d$. *Dacă este îndeplinită relația*

(15) $$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\ne i}}^{n} |a_{ij}|, j = \overline{1,n}$$

sistemului $x - Bx = d, B = I - AD^{-1}$,*unde D este matricea diagonală a lui A, conform* Observaţiei 6.6, *sistemului i se poate aplica Teorema 6. 5.*

Este suficient să observăm că $\|B\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} \dfrac{|a_{ij}|}{|a_{ji}|} = q < 1$.(**3.1**, exemplul 4).

Soluţia z a sistemului $Ax = d$, se obţine din soluţia z' a sistemului $x - Bx = d$, prin relaţia $z = D^{-1}z'$.

6.2.2 Metoda Gauss-Seidel

Fie $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{L}(C^n)$, $b \in C^n$. Metoda Gauss-Seidel este o metodă iterativă de rezolvare a sistemului

(16) $$x - Bx = b$$

Notăm $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & & 0 & 0 \\ & . & & 0 & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$ şi $R = B - L$.

Avem

$$x - Bx = b \Leftrightarrow x - (L + R)x = b \Leftrightarrow x - (I - L)^{-1}Rx = (I - L)^{-1}b.$$

Notăm $Q = (I - L)^{-1}R$ şi $c = (I - L)^{-1}b$. Metoda Jacobi aplicată sistemului $x - Qx = c$ este metoda Gauss-Seidel. Şirul Jacobi în această situaţie este

(17) $$x^k = Qx^{k-1} + c, k \geq 1 \text{ cu } x^0 \in C^n.$$

Pe componente acest şir se scrie

(18) $$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^k + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{k-1} + b_i, i = \overline{1,n}.$$

Notăm

(19) $$q_1 = \sum_{j=1}^{n} |b_{1j}|, q_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| q_j + \sum_{j=i}^{n} |b_{ij}|, i = \overline{2,n}\ ;\ q = \max_{1 \leq i \leq n} q_i.$$

Teorema 6.9 *Dacă* $q < 1$ *atunci pentru orice* $b \in C^n$ *sistemul* (16) *are soluţie unică z şi şirul* (17) *converge la z pentru orice* $x^0 \in C^n$. *Evaluările erorii sunt date de relaţiile*

(20) $$\|x^k - z\|_\infty \leq \frac{q}{1-q} \|x^k - x^{k-1}\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^1 - x^0\|_\infty.$$

Demonstraţie. Vom arăta că $\|Q\|_\infty \leq q < 1$. Apoi se va aplica Observaţia 6.7. Fie $x \in C^n$. Avem

$$y = Qx \Leftrightarrow y = (I - L)^{-1}Rx \Leftrightarrow (I - L)y = Rx \Leftrightarrow y = Ly + Rx.$$

Ultima relaţie pe componente are forma:

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} x_j ; y_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} y_j + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j, i = \overline{2,n}.$$

Demonstrăm prin metoda inducţiei complete că $|y_i| \leq q_i \|x\|_\infty, i = \overline{1,n}$.

Avem $\left|y_1\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|b_{1j}\right|\left|x_j\right| \le q_1\|x\|_\infty$. Pentru i fixat, $i \le n$, presupunem adevărate relațiile $\left|y_j\right| \le q_j\|x\|_\infty, j=\overline{1,i-1}$. Apoi

$$\left|y_i\right| \le \sum_{j=1}^{i-1}\left|b_{ij}\right|\left|y_j\right| + \sum_{j=i}^{n}\left|b_{ij}\right|\left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{i-1}\left|b_{ij}\right|q_j\|x\|_\infty + \sum_{j=i}^{n}\left|b_{ij}\right|\|x\|_\infty \le q_i\|x\|_\infty .$$

Prin urmare avem $\|Qx\|_\infty = \|y\|_\infty \le q\|x\|_\infty$. Din definiția normei $\|Q\|_\infty \le q$.

Teorema 6.10 *Dacă elementele matricii B satisfac condițiile*

$$\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right| \le 1; \sum_{j=i}^{n}\left|b_{ij}\right| < 1; i=\overline{1,n} \tag{21}$$

atunci pentru orice $b \in C^n$ *sistemul* (16) *are soluție unică z și șirul* (17) *converge la z pentru orice* $x^0 \in C^n$. *Evaluările erorii sunt date de relațiile*

$$\left\|x^k - z\right\|_\infty \le \frac{q}{1-q}\left\|x^k - x^{k-1}\right\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\left\|x^1 - x^0\right\|_\infty . \tag{22}$$

Vom considera pentru $y^0 \in C^n$ *șirul Jacobi*

$$y^{k+1} = By^k + b, k \ge 0.$$

În condițiile (21) $y^k \to z$ *și avem evaluările erorii*

$$\left\|y^k - z\right\|_\infty \le \|B\|_\infty\left\|(I-B)^{-1}\right\|_\infty\left\|y^k - y^{k-1}\right\|_\infty \le q^{\left[\frac{k}{n}\right]}\left\|(I-B)^{-1}\right\|_\infty\left\|y^1 - y^0\right\|_\infty, k \ge 1. \tag{23}$$

Demonstrație. Vom demonstra prin metoda inducției relațiile $q_i < 1, i=\overline{1,n}$. Avem $q_1 = \sum_{j=1}^{n}\left|b_{1j}\right| < 1$. Pentru i fixat, $i \le n$, presupunem adevărate relațiile

$$q_j < 1, j=\overline{1,i-1}.$$

Apoi avem:

$$q_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| q_j + \sum_{j=i}^{n} |b_{ij}| \le \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| + \sum_{j=i}^{n} |b_{ij}| \le 1 .$$

Dacă $\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = 1$ şi $\sum_{j=i}^{n} |b_{ij}| < 1$ avem $\sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| > 0$. Prin urmare există $j_0 \in \{1,\dots,i-1\}$, astfel încât $b_{ij_0} \ne 0$. Atunci avem

$$q_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne j_0}}^{i-1} |b_{ij}| q_j + |b_{ij_0}| q_{j_0} + \sum_{j=i}^{n} |b_{ij}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne j_0}}^{n} |b_{ij}| + |b_{ij_0}| q_{j_0} < \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \le 1.$$

Se aplică acum Teorema 6.9. Pentru a doua parte a teoremei vom demonstra relaţia $\|B^n\|_\infty \le q$. Fie $x \in C^n$ şi $v^k = B^k x, k = \overline{1,n}$. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice, dupa k, relaţia $|v_j^k| \le q_j \|x\|_\infty, j = \overline{1,k}, k = \overline{1,n}$. Avem $|v_1^1| \le \sum_{j=1}^{n} |b_{1j}| |x_j| \le q_1 \|x\|_\infty$. Presupunem acum $|v_j^k| \le q_j \|x\|_\infty, j = \overline{1,k}, k < n$.

Pentru $j = \overline{1,k+1}$ avem:

$$|v_j^{k+1}| = |(BB^k x)_j| = |(Bv^k)_j| = \left|\sum_{s=1}^{n} b_{js} v_s^k\right| \le \sum_{s=1}^{j-1} |b_{js}| |v_s^k| + \sum_{s=j}^{n} |b_{js}| |v_s^k| \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{j-1} |b_{js}| q_s \|x\|_\infty + \sum_{s=j}^{n} |b_{js}| \|B^k x\|_\infty$$

Cu $\|B^k x\|_\infty \le \|B\|_\infty^k \|x\|_\infty \le \|x\|_\infty$, obţinem $|v_j^{k+1}| \le (\sum_{s=1}^{j-1} |b_{js}| q_s + \sum_{s=j}^{n} |b_{js}|) \|x\| = q_j \|x\|_\infty$.

Prin urmare pentru $k = n$ avem $|v_j^n| \le q_j \|x\|_\infty, j = \overline{1,n}$,

$$\|B^n v\|_\infty \le \max_{1\le j\le n} |v_j^n| \le q \|x\|_\infty \text{ şi } \|B^n\|_\infty \le q .$$

Pentru $k > n$ există $p, r \in N$, astfel încât $k = np + r$. Avem

$$B^k = (B^n)^p B^r ,\ \|B^k\|_\infty \le \|B^n\|_\infty^p \|B^r\|_\infty \le \|B^n\|_\infty^p \le q^p$$

de unde $\left\|B^k\right\|_\infty \leq q^{\left[\frac{k}{n}\right]} \to 0$. Aplicăm apoi Teorema 6. 5 şi obţinem rezultatul.

6.2.3 Metoda relaxării simultane

Considerăm sistemul

(24) $$Ax = b;\ A \in \mathcal{L}(C^n),\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}};\ b \in C^n;\ b = (b_i)_{1\leq i\leq n},$$

unde A este o matrice autoadjunctă şi pozitiv definită.

Fie D o matrice diagonală având pe diagonală elementele matricii A şi $\sigma \in R\setminus\{0\}$. Sistemul (24) este echivalent cu

(25) $$x - B_\sigma x = b_\sigma$$

unde $B_\sigma = I - \sigma D^{-1}A, b_\sigma = \sigma D^{-1}b$.

Şirul Jacobi ataşat sistemului (25) este

(26) $$x^k = B_\sigma x^{k-1} + b_\sigma, x^0 \in C^n.$$

Pe componente şirul (26) are forma

(27) $$x_i^k = -\frac{\sigma}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{k-1} + (1-\sigma)x_i^{k-1} + \sigma\frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}$$

Cu ajutorul produsului scalar euclidian din C^n introducem un nou produs scalar $\langle x,y\rangle_D = \langle Dx,y\rangle, x,y \in C^n$, căruia îi corespunde norma:

$$\|x\|_D = \sqrt{\langle x,x\rangle_D}, x \in C^n.$$

Teorema 6. 11 *Pentru orice* $x_0 \in C^n$, *şirul* (26) *converge către soluţia* z *a sistemului* (24), *dacă şi numai dacă* $0 < \sigma < \frac{2}{\lambda_1}$, *unde* λ_1 *este cea mai mare valoare proprie a lui* $D^{-1}A$. *Evaluarea erorii este dată de*:

(28) $$\left\|x^k - z\right\|_D \le \frac{q}{1-q}\left\|x^k - x^{k-1}\right\|_D \le \frac{q^k}{1-q}\left\|x^1 - x^0\right\|_D,$$

unde $q = \max_{1\le i\le n}\left|1-\sigma\lambda_i\right|$ iar $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ *sunt valorile proprii ale lui* $D^{-1}A$.

Demonstrație. Observăm că $\det A > 0$, deoarece matricea A este autoadjunctă şi pozitiv definită. Astfel sistemul (24) are soluție unică. Avem

$$\left\langle D^{-1}Ax,y\right\rangle_D = \left\langle Ax,y\right\rangle = \left\langle x,Ay\right\rangle = \left\langle x,D^{-1}Ay\right\rangle_D, x,y\in C^n$$

$$\left\langle D^{-1}Ax,x\right\rangle_D = \left\langle Ax,x\right\rangle > 0, x\in C^n, x\ne 0.$$

Prin urmare $D^{-1}A$ este autoadjunctă şi pozitiv definită în raport cu produsul scalar indexat cu D. Valorile proprii ale lui $D^{-1}A$ le ordonăm astfel $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n > 0$. Există o bază $\{u_1,\ldots,u_n\}$ a lui C^n formată din vectorii proprii ai lui $D^{-1}A$ astfel încât $\left\langle u_i,u_j\right\rangle_D = \delta_{ij}, D^{-1}Au_i = \lambda_i u_i, i,j=\overline{1,n}$.(Teorema 5. 30, Observația 2).

Matricea B_σ are ca valori proprii $\{1-\sigma\lambda_i, i=\overline{1,n}\}$, corespunzătoare vectorilor proprii $\{u_i, i=\overline{1,n}\}$. Vom demonstra că $\left\|B_\sigma\right\|_D = q$. Pentru $x\in C^n, x=\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ avem

$$\left\|B_\sigma x\right\|_D^2 = \left\langle B_\sigma x, B_\sigma x\right\rangle_D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{x_j}\left\langle B_\sigma u_i, B_\sigma u_j\right\rangle_D =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{x_j}(1-\sigma\lambda_i)(1-\sigma\lambda_j)\left\langle u_i,u_j\right\rangle_D = \sum_{i=1}^{n}(1-\sigma\lambda_i)^2\left|x_i\right|^2 \le q^2\left\|x\right\|_D^2$$

Prin urmare $\left\|B_\sigma\right\|_D \le q$. Dar $\left|1-\sigma\lambda_i\right| \le \left\|B_\sigma\right\|_D, i=\overline{1,n}$, de unde şi $q \le \left\|B_\sigma\right\|_D$. Dacă $0<\sigma<\dfrac{2}{\lambda_1}$ atunci $\left\|B_\sigma\right\|_D = q < 1$ şi se aplică Observația 6. 6.

Reciproc. Dacă $\sigma \le 0$ sau $\sigma \ge \dfrac{2}{\lambda_1}$ atunci pentru orice $k \ge 1$,

$B_\sigma^k u_1 = (1-\sigma\lambda_1)^k u_1$. Prin urmare $\left\|B_\sigma^k u_1\right\|_D = |1-\sigma\lambda_1|^k \geq 1$ şi $(B_\sigma^k u_1)_k$ nu converge la 0. Conform Teoremei 6. 5, şirul (27) este divergent.

Observaţia 6. 12 *Valoarea proprie* λ_1 *este greu de calculat. Deoarece* $\lambda_1 \leq \left\|D^{-1}A\right\|$, *putem alege* $\sigma \in (0, \frac{2}{\left\|D^{-1}A\right\|})$, *unde am folosit o normă operatorială pentru* $D^{-1}A$.

Observaţia 6. 13 *Valoarea optimă pentru* σ, *este cea care realizează minimul pentru* $q = \max_{1\leq i\leq n}|1-\sigma\lambda_i| = \max(|1-\sigma\lambda_1|,|1-\sigma\lambda_n|)$. *Această valoare este* $\sigma = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$, *căreia îi corespunde* $q = \frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}$.

6.2.4 Metoda relaxării succesive

Considerăm sistemul

(29) $$Ax = b;\ A \in \mathcal{L}(C^n),\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}};\ b \in C^n;\ b = (b_i)_{1\leq i\leq n},$$

unde A este o matrice autoadjunctă şi pozitiv definită. Notăm

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şi $R = A - L - D$. Considerăm $\sigma > 0$. Sistemul (29) este echivalent cu

(30) $$x - C_\sigma x = d_\sigma$$

unde $C_\sigma = (\frac{1}{\sigma}D + L)^{-1}((\frac{1}{\sigma}-1)D - R)$ şi $d_\sigma = (\frac{1}{\sigma}D + L)^{-1}b$.

Şirul Jacobi ataşat sistemului (30) este

(31) $$x^k = C_\sigma x^{k-1} + d_\sigma, x^0 \in C^n.$$

Pe componente şirul (31) are forma

$$x_1^k = (1-\sigma)x_1^{k-1} - \frac{\sigma}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{k-1} + \frac{\sigma b_1}{a_{11}}$$
$$x_i^k = (1-\sigma)x_i^{k-1} - \frac{\sigma}{a_{ii}}(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k-1}) + \frac{\sigma b_i}{a_{ii}}, i = \overline{2,n}.$$

Propoziţia 6. 14 *Pentru orice* $\sigma > 0$,*raza spectrală a matricii* C_σ, *este mai mare sau egală cu* $|1-\sigma|$.

Demonstraţie. Fie ρ raza spectrală a lui C_σ. Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sunt valorile proprii ale lui C_σ avem $\rho^n \geq |x_1| \ldots |x_n| = |\det C_\sigma|$. Dar

$$\det C_\sigma = \det(\frac{1}{\sigma}D + L)^{-1} \det((\frac{1}{\sigma} - 1)D - R) = (\frac{1}{\sigma^n}\det D)^{-1}(\frac{1}{\sigma} - 1)^n \det D = (1-\sigma)^n$$

de unde $\rho \geq |1-\sigma|$.

Teorema 6. 15 *Considerăm o matrice A nesingulară, autoadjunctă, astfel încât matricea A se descompune în diferenţa a două matrici, $A = M - N$, unde M este inversabilă şi $M^* + N$ este pozitiv definită. Sunt echivalente:*
(i) A pozitiv definită;
(ii) $(M^{-1}N)^k \to 0$.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$. Introducem un nou produs scalar pe C^n cu ajutorul matricii A şi a produsului scalar euclidian $\langle x,y\rangle_A = \langle Ax,y\rangle, x,y \in C^n$ căruia îi corespunde norma $\|x\|_A = \sqrt{\langle x,x\rangle_A}, x \in C^n$. Pentru $x \in C^n \setminus \{0\}$ calculăm

$$\|M^{-1}Nx\|_A^2 = \langle AM^{-1}Nx, M^{-1}Nx\rangle = \langle AM^{-1}(M-A)x, M^{-1}(M-A)x\rangle =$$
$$= \langle Ax - AM^{-1}Ax, x - M^{-1}Ax\rangle$$

Notăm $y = M^{-1}Ax$ şi avem

$$\|M^{-1}Nx\|_A^2 = \langle Ax - Ay, x - y\rangle = \langle Ax, x\rangle - \langle Ay, x\rangle - \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, y\rangle =$$
$$= \|x\|_A^2 - \langle y, My\rangle - \langle My, y\rangle + \langle Ay, y\rangle = \|x\|_A^2 - \langle (M^* + M - A)y, y\rangle =$$
$$= \|x\|_A^2 - \langle (M^* + N)y, y\rangle < \|x\|_A^2$$

Prin urmare $\|M^{-1}Nx\|_A < 1$, care implică $(M^{-1}N)^k \to 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Notăm $E = M^{-1}N$. Din ipoteză $E^k \to 0$ şi $(E^*)^k \to 0$. Definim matricea F astfel:

$$F = A - E^*AE = (M^{-1}A)^*(M + M^* - A)M^{-1}A = (M^{-1}A)^*(M^* + N)M^{-1}A.$$

Matricea F este autoadjunctă şi pozitiv definită, deoarece $F = F^*$ şi pentru $x \in C^n \setminus \{0\}$, $y = M^{-1}Ax \neq 0$ avem $\langle Fx, x\rangle = \langle (M^* + N)y, y\rangle > 0$.

Matricea A se poate scrie astfel $A = F + \sum_{k=1}^{n-1}(E^*)^k FE^k + (E^*)^n AE^n$.

Folosim ipoteza $A = F + \sum_{k=1}^{\infty}(E^*)^k FE^k$. Prin urmare, pentru $x \in C^n \setminus \{0\}$

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Fx, x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\langle (E^*)^k FE^k x, x\rangle = \langle Fx, x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\langle FE^k x, E^k x\rangle > 0.$$

Teorema 6. 16 *Pentru orice* $x_0 \in C^n$, *şirul* (31) *converge către soluţia* z *a sistemului* (29), *dacă şi numai dacă* $0 < \sigma < 2$. *Evaluarea erorii este dată de*

(32) $$\|x^k - z\|_A \leq \frac{q}{1-q}\|x^k - x^{k-1}\|_A \leq \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|_A,$$

unde $q = \|C_\sigma\|_A$, *norma operatoriala indusă de norma vectorială* $\|x\|_A = \sqrt{\langle Ax, x\rangle}, x \in C^n$.

Pentru $0 < \sigma < 1$ *metoda se numeşte metoda subrelaxării, pentru* $1 < \sigma < 2$ *metoda se numeşte metoda suprarelaxării iar pentru* $\sigma = 1$ *se regăseşte metoda Gauss-Seidel.*

Demonstrație. Fie $0<\sigma<2$. Folosim pentru început Teorema 6. 15. Punem $M=\frac{1}{\sigma}D+L$ şi $N=(\frac{1}{\sigma}-1)D-R$. Atunci $M^*+N=\frac{2-\sigma}{\sigma}D$ şi M^*+N este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\frac{2-\sigma}{\sigma}>0 \Leftrightarrow \sigma\in(0,2)$. Cum $C_\sigma=M^{-1}N$ avem $q=\|C_\sigma\|_A<1$. Aplicăm acum Teorema lui Jacobi şi Observația 6.6.

Dacă $\sigma\notin(0,2)$, conform Propoziției 6.14, raza spectrală ρ a matricii C_σ, satisface relația $\rho\geq|1-\sigma|\geq 1$ şi prin urmare $(C_\sigma^k)_k$ nu converge la 0. Folosind acum Teorema 6. 5, şirul (31) nu este convergent la soluția z a sistemului (29).

6.3 Metode de determinare a valorilor şi vectorilor proprii

Fie $A\in\mathcal{L}(K^n)$, o matrice autoadjunctă. Ordonăm valorile proprii $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, ale lui A: $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$.

Propoziția 6. 17 *Este adevărată relația*

$$\lambda_j=\min_{M\in\Omega_j}\max_{\substack{x\in M\\ x\neq 0}}\frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2},\ j=\overline{1,n} \tag{33}$$

unde Ω_j este mulțimea subspațiilor lui K^n de dimensiune $n-j+1$.

Demonstrație. Fie $\{u_1,\ldots,u_n\}$ baza ortonormală a lui K^n, formată din vectorii proprii ai matricii A. (Teorema 5.30, Observația 2). Avem $Au_i=\lambda_i u_i, i=\overline{1,n}$. Fie M_0 subspațiul lui K^n generat de $\{u_j,\ldots,u_n\}$. Pentru $x\in M_0, x\neq 0$, $x=\sum_{k=j}^{n}x_k u_k$ avem

$$\frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2}=\frac{\sum_{k=j}^{n}\lambda_k|x_k|^2}{\sum_{k=j}^{n}|x_k|^2}\leq\lambda_j \text{ şi } \frac{\langle Au_j,u_j\rangle}{\|u_j\|^2}=\lambda_j.$$

Prin urmare $\max\limits_{\substack{x\in M_0\\ x\neq 0}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2} = \lambda_j$. Pentru a demonstra propoziţia este suficient să demonstrăm că $\min\limits_{M\in\Omega_j} \max\limits_{\substack{x\in M\\ x\neq 0}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_j$. Considerăm $M \in \Omega_j$ şi N_0 subspaţiul lui K^n generat de $\{u_1,\ldots,u_j\}$. Avem $M \cap N_0 \neq \{0\}$. Pentru $x_0 \in M \cap N_0, x_0 = \sum\limits_{i=1}^{j} x_i^0 u_i$ avem $\frac{\langle Ax_0,x_0\rangle}{\|x_0\|^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i |x_i^0|^2}{\sum\limits_{i=1}^{j} |x_i^0|^2} \geq \lambda_j$. Prin urmare

$$\max_{\substack{x\in M\\ x\neq 0}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_j \text{ şi } \min_{M\in\Omega_j} \max_{\substack{x\in M\\ x\neq 0}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_j .$$

Propoziţia 6. 18 *Fie $A,B \in \mathcal{L}(K^n)$, două matricii autoadjuncte. Valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, cu ordonarea următoare $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Valorile proprii ale lui B sunt $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, cu ordonarea următoare $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$. Atunci*

(34) $$|\lambda_j - \mu_j| \leq \|A-B\|_2 \leq \|A-B\|, j = \overline{1,n},$$

unde norma folosită este orice normă operatorială.

Demonstraţie. Considerăm $M \in \Omega_j$, $x \in M, x \neq 0$. Avem

$$\frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Bx,x\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\langle (A-B)x,x\rangle}{\|x\|^2} \leq \max_{\substack{y\in M\\ y\neq 0}} \frac{\langle By,y\rangle}{\|y\|^2} + \|A-B\|_2 .$$

De aici

$$\max_{\substack{x\in M\\ x\neq 0}} \frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2} \leq \max_{\substack{y\in M\\ y\neq 0}} \frac{\langle By,y\rangle}{\|y\|^2} + \|A-B\|_2$$

$$\lambda_j \leq \mu_j + \|A-B\|_2 .$$

Se ştie că $\|A-B\|_2 \leq \|A-B\|$ pentru orice normă operatorială.

Observaţia 6.19 *Fie $A,B \in \mathcal{L}(K^n)$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. În condiţiile Propoziţiei 6. 18 avem:*

(35) $$|\lambda_j - \mu_j| \le (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij} - b_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}, j = \overline{1,n}.$$

Este suficient să constatăm că este adevărată relația $\|A - B\|_2 \le \|A - B\|_F$, *unde* $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|)^{\frac{1}{2}}$ *este norma Frobenius.*

6.3.1 Metoda Jacobi

Această metodă determină valorile proprii ale unei matrici A reale, simetrice de dimensiune n, printr-un proces recurent. Se folosesc rotații pentru a transforma matricea dată în matrici asemenea, matrici care au aceleași valori proprii.

Considerăm $\sigma, \tau \in \{1,\dots,n\}, \sigma < \tau$ și $\theta \in R$. O rotație de unghi $\theta \in R$ corespunzătoare lui σ, τ este o matrice $T_{\sigma\tau} \in \mathcal{L}(R^n)$, definită astfel

$$T_{\sigma\tau} = I + (\cos\theta - 1)(E_{\sigma\sigma} + E_{\tau\tau}) - \sin\theta E_{\sigma\tau} + \sin\theta E_{\tau\sigma}$$

unde $E_{ij} = (\delta_{ki}\delta_{pj})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le p\le n}}$. Avem $\det T_{\sigma\tau} = 1$ și $T_{\sigma\tau}{}^t = T_{\sigma\tau}^{-1}$.

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{L}(R^n)$ o matrice simetrică. Construim $B = T_{\sigma\tau}{}^t A T_{\sigma\tau}$. Dacă notăm $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}, T_{\sigma\tau} = (t_{ij}^{\sigma\tau})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, elementele lui B se calculează din relațiile $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{\sigma\tau} \sum_{s=1}^{n} a_{ks} t_{sj}^{\sigma\tau}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$. Prin calcul direct avem

$$b_{ij} = a_{ij}, i \ne \sigma,\tau, j \ne \sigma,\tau$$

$$b_{j\sigma} = b_{\sigma j} = a_{j\sigma}\cos\theta + a_{j\tau}\sin\theta, j \ne \sigma,\tau$$

$$b_{j\tau} = b_{\tau j} = -a_{j\sigma}\sin\theta + a_{j\tau}\cos\theta, j \ne \sigma,\tau$$

$$b_{\sigma\sigma} = a_{\sigma\sigma}\cos^2\theta + a_{\sigma\tau}\sin 2\theta + a_{\tau\tau}\sin^2\theta$$

$$b_{\tau\tau} = a_{\tau\tau}\cos^2\theta - a_{\sigma\tau}\sin 2\theta + a_{\sigma\sigma}\sin^2\theta$$

$$b_{\sigma\tau} = b_{\tau\sigma} = a_{\sigma\tau}\cos 2\theta + \frac{1}{2}(a_{\tau\tau} - a_{\sigma\sigma})\sin 2\theta.$$

Matricea B este asemenea cu A.

Notăm $|A| = \|A - D_A\|_F$, unde D_A este matricea diagonală, care are pe diagonală elementele matricii A.

Propoziţia 6. 20 *În notațiile de mai sus avem*

(36) $$|B|^2 = |A|^2 + 2(b_{\sigma\tau}^2 - a_{\sigma\tau}^2).$$

Demonstrație. Este suficient să observăm relaţia
$$B^2 = T_{\sigma\tau}^{-1} A T_{\sigma\tau} T_{\sigma\tau}^{-1} A T_{\sigma\tau} = T_{\sigma\tau}^{-1} A^2 T_{\sigma\tau}.$$

De aici urma celor două matrici este aceiaşi. Avem

$$|B|^2 + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = |A|^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \Leftrightarrow |B|^2 = |A|^2 + a_{\sigma\sigma}^2 + a_{\tau\tau}^2 - b_{\sigma\sigma}^2 - b_{\tau\tau}^2.$$

Prin calcul direct $a_{\sigma\sigma}^2 + a_{\tau\tau}^2 - b_{\sigma\sigma}^2 - b_{\tau\tau}^2 = 2(b_{\sigma\tau}^2 - a_{\sigma\tau}^2)$, de unde relația (36).

Algoritmul Jacobi

În condiţiile de mai sus, dacă alegem θ astfel încât $b_{\sigma\tau} = 0$ avem $|B| \le |A|$. Această alegere se poate face astfel:

$$a_{\sigma\sigma} \ne a_{\tau\tau}\,;\, tg2\theta = \frac{2a_{\sigma\tau}}{a_{\sigma\sigma} - a_{\tau\tau}}, |\theta| < \frac{\pi}{4}$$

$$a_{\sigma\sigma} = a_{\tau\tau}\,;\, \theta = \frac{\pi}{4}$$

Consideraţiile teoretice formulate anterior ne conduc la construirea unui şir de matrici asemenea

$$(A_m)_{m\ge 0},\ A_m = (a_{ij}^m)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

$$A_0 = A\,;\ A_{m+1} = T_{\sigma_m\tau_m}^t A_m T_{\sigma_m\tau_m}$$

unde $\sigma_m < \tau_m$ sunt alese astfel încât $\left|a_{\sigma_m\tau_m}^m\right| = \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i\ne j}} \left|a_{ij}^m\right|$ şi θ_m este ales astfel încât $a_{\sigma_m\tau_m}^{m+1} = 0$.

Teorema 6.21 *Fie* $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ *valorile proprii ale matricii* A *şi* $a_1^m \geq a_2^m \geq \ldots \geq a_n^m$ *elementele diagonale ale matricii* A_m, *ordonate după mărime. Atunci*

$$\left|\lambda_j - a_j^m\right| \leq \left|A_m\right| \leq q^m \left|A\right|, j = \overline{1,n}$$

unde $q = (1 - \dfrac{2}{n^2 - n})^{\frac{1}{2}}$.

Demonstraţie. Prima parte a inegalităţii se obţine din Observaţia 6. 19. Pentru a doua parte este suficient să observăm că sunt adevărate relaţiile

$$\left|A_m\right|^2 \leq (n^2 - n) a_{\sigma_m \tau_m}^2$$

$$\left|A_{m+1}\right|^2 = \left|A_m\right|^2 - 2a_{\sigma_m \tau_m}^2 \leq \left|A_m\right|^2 (1 - \frac{2}{n^2 - n}).$$

De aici avem $\left|A_m\right| \leq q \left|A_{m-1}\right| \leq \ldots \leq q^m \left|A\right|$.

Observaţia 6.22 *Valorile proprii, în condiţiile Teoremei 6. 21, se obţin ca limita unor şiruri numerice*

$$\lambda_j = \lim_{m \to \infty} a_j^m, j = \overline{1,n}.$$

Vom da un exemplu mai jos în care valorile proprii se obţin exact.

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$ o matrice cu elemente reale. Cu ajutorul algoritmului Jacobi, după un număr de cel mult 4 paşi se obţine o matrice diagonală, care pe diagonală are valorile proprii
$\lambda_1 = a + b + c + d; \lambda_2 = a - b + c - d; \lambda_3 = a + b - c - d; \lambda_4 = a - b - c + d$.

6.3.2 Metoda Givens

Această metodă urmăreşte transformarea unei matrici A reale, simetrice, de dimensiune n, într-o matrice tridiagonală, asemenea cu A. Se folosesc transformări ortogonale elementare.

Considerăm indicii $\sigma, \tau \in \{1,\dots,n\}, \sigma < \tau$. O transformare ortogonală corespunzătoare pozițiilor σ, τ este o matrice $T_{\sigma\tau} \in \mathcal{L}(R^n)$, definită astfel

$$T_{\sigma\tau} = I + (c-1)(E_{\sigma\sigma} + E_{\tau\tau}) - sE_{\sigma\tau} + sE_{\tau\sigma}$$

unde $E_{ij} = (\delta_{ki}\delta_{pj})_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le p\le n}}$ şi $s^2 + c^2 = 1$. Avem $\det T_{\sigma\tau} = 1$ şi $T_{\sigma\tau}{}^t = T_{\sigma\tau}^{-1}$.

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{L}(R^n)$, matrice simetrică. Construim $B = T_{\sigma\tau}{}^t A T_{\sigma\tau}$.

Dacă notăm $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$, elementele lui B se calculează astfel:

$$b_{ij} = a_{ij}, i \ne \sigma,\tau, j \ne \sigma,\tau$$
$$b_{j\sigma} = b_{\sigma j} = ca_{j\sigma} + sa_{j\tau}, j \ne \sigma,\tau$$
$$b_{j\tau} = b_{\tau j} = ca_{j\tau} - sa_{j\sigma}, j \ne \sigma,\tau$$
$$b_{\sigma\sigma} = c^2 a_{\sigma\sigma} + 2csa_{\sigma\tau} + s^2 a_{\tau\tau}$$
$$b_{\tau\tau} = c^2 a_{\tau\tau} - 2csa_{\sigma\tau} + s^2 a_{\sigma\sigma}$$
$$b_{\sigma\tau} = b_{\tau\sigma} = a_{\sigma\tau}(c^2 - s^2) + cs(a_{\tau\tau} - a_{\sigma\sigma}).$$

Construim matricea B astfel încât elementul de pe poziția $(\sigma-1,\tau)$ să se anuleze, $b_{\sigma-1\tau} = ca_{\sigma-1\tau} - sa_{\sigma-1\sigma} = 0$. Dacă $b_{\sigma-1\tau}$ nu este nul este suficient să alegem c, s astfel

(37) $$c = \frac{a_{\sigma-1\sigma}}{\sqrt{a_{\sigma-1\sigma}^2 + a_{\sigma-1\tau}^2}}; s = \frac{a_{\sigma-1\tau}}{\sqrt{a_{\sigma-1\sigma}^2 + a_{\sigma-1\tau}^2}}.$$

Pentru a ajunge la o matrice tridiagonală sînt suficiente cel mult $(n-1)(n-2)/2$ de transformări ortogonale, pe care le aplicăm succesiv.

6.3.3 Metoda bisecției

Fie $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in R, i = \overline{0,n}, a_0 \ne 0$, un polinom de grad n, cu coeficienți reali. Numim *şir Sturm* ataşat polinomului P un şir de polinoame cu coeficienți reali $\{p_0,\dots,p_m\}$, cu $p_0 = P$, care satisface condițiile:

(i) p_0 nu are rădacini multiple reale;

(ii) Pentru $\alpha \in R$, astfel încât $p_0(\alpha) = 0$ avem $signp_1(\alpha) = -signp_0'(\alpha)$;

(iii) Pentru $\alpha \in R$, astfel încât $p_i(\alpha) = 0, i = \overline{1, m-1}$ avem $p_{i+1}(\alpha)p_{i-1}(\alpha) < 0$;

(iv) p_m nu are rădăcini reale.

Construim o funcţie $i: R \to Z$, pe care o numim *indice*, care asociază fiecărui punct $\alpha \in R$, valoarea $i(\alpha)$ care reprezintă numărul variaţiilor de semn în şirul $\{p_0(\alpha), \ldots, p_m(\alpha)\}$. Dacă apar zerouri în şir se înlătură şi se numără variaţiile de semn în şirul de numere rămas.

Propoziţia 6.23 *Fie $p_0, \ldots, p_m$ şirul Sturm asociat polinomului P. Numărul rădăcinilor reale ale polinomului P în intervalul $[a,b)$ este i(b) - i(a).*

Demonstraţie. Fie $\alpha \in R$ astfel încât $p_0(\alpha) = 0$. Atunci $p_0'(\alpha)p_1(\alpha) \neq 0$. Fie $h > 0$, h suficient de mic astfel încât p_0', p_1 nu se anulează pe $[\alpha - h, \alpha + h]$ şi p_0 nu se anulează pe $[\alpha - h, \alpha + h] \setminus \{\alpha\}$. Variaţia semnelor primelor două polinoame se citeşte în tablourile următoare

x	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
p_0	$-$	0	$+$
p_1	$-$	$-$	$-$

$p_0'(\alpha) > 0$

x	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
p_0	$+$	0	$-$
p_1	$+$	$+$	$+$

$p_0'(\alpha) < 0$

Când se trece peste o rădăcină a lui p_0, apare o variaţie de semn pe primele două locuri în şirul Sturm pe intervalul $[\alpha - h, \alpha + h]$.

Fie $\alpha \in R$ astfel încât $p_i(\alpha) = 0, i = \overline{1, m-1}$. Atunci $p_{i-1}(\alpha)p_{i+1}(\alpha) < 0$. Fie $h > 0$, h suficient de mic astfel încât p_{i-1}, p_{i+1} nu se anulează pe $[\alpha - h, \alpha + h]$ şi p_i nu se anulează pe $[\alpha - h, \alpha + h] \setminus \{\alpha\}$. Variaţia semnelor primelor două polinoame se citeşte în tablourile următoare

x	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
p_{i-1}	$-$	$-$	$-$
p_i	$-$	0	$+$
p_{i+1}	$+$	$+$	$+$

x	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
p_{i-1}	$+$	$+$	$+$
p_i	$-$	0	$+$
p_{i+1}	$-$	$-$	$-$

x	$\alpha-h$	α	$\alpha+h$
p_{i-1}	$-$	$-$	$-$
p_i	$+$	0	$-$
p_{i+1}	$+$	$+$	$+$

x	$\alpha-h$	α	$\alpha+h$
p_{i-1}	$+$	$+$	$+$
p_i	$+$	0	$-$
p_{i+1}	$-$	$-$	$-$

Numărul variaţiilor de semn nu se modifică în tripletul $p_{i-1}(t), p_i(t), p_{i+1}(t)$ pentru $t \in [\alpha - h, \alpha + h]$. Demonstraţia este încheiată dacă observăm că atâta timp cât polinoamele din şir nu se anulează indicele este constant, datorită continuităţii funcţiilor polinomiale.

Metoda bisecţiei

Fie A o matrice tridiagonală, reală şi simetrică

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & & 0 \\ . & & & & . \\ 0 & & & \dots & b_n \\ 0 & & . & b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ cu } b_2 \dots b_n \neq 0.$$

Notăm $p_k(x) = \det(A_k - xI_k), k = \overline{1,n}$, unde

$$A_k = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & & 0 \\ & & & & . \\ 0 & & & \dots & b_k \\ 0 & & & b_k & a_k \end{pmatrix}$$

şi I_k este matricea identitate de dimensiune k. Observăm că p_n este polinomul caracteristic al matricii A. Între aceste polinoame există relaţiile

(38) $$p_{k+1}(x) = (a_{k+1} - x)p_k(x) - b_k^2 p_{k-1}(x), k = \overline{1,n-1},$$

unde $p_0(x) = 1$.

Teorema 6. 24 *Sunt adevărate afirmaţiile*

(*i*) *Polinomul* p_k *este de grad k şi* $\lim\limits_{x \to -\infty} p_k(x) = +\infty, k = \overline{1,n}$;

(*ii*) *Pentru orice* $\alpha \in R$, *astfel încât* $p_k(\alpha) = 0, k = \overline{1,n-1}$ *avem* $p_{k+1}(\alpha)p_{k-1}(\alpha) < 0$;

(iii) *Rădăcinile polinoamelor* $p_k, k=\overline{1,n}$ *sunt reale şi distincte*;
(iv) *Polinoamele* $\{p_n,\dots,p_0\}$ *formează un şir Sturm asociat lui* p_n;
(v) *Pentru orice* $\alpha \in R$, $i(\alpha)$ *este numărul valorilor proprii ale lui A mai mici decât* α.

Demonstrație.(i) Este suficient să observăm că $p_k(x)=(-1)^k x^k+\dots+\det A_k$.
(ii) Rezultă imediat din relația (38).(iii) Fie $x_1^k<x_2^k<\dots<x_k^k$, rădăcinile polinomului $p_k, k=\overline{1,n}$. Vom arăta prin recurență că rădăcinile polinomului p_k şi p_{k-1} satisfac relația

$$x_1^k<x_1^{k-1}<x_2^k<x_2^{k-1}<\dots<x_{k-1}^{k-1}<x_k^k.$$

Demonstrăm afirmația prin inducție matematică. Pentru $k=1$ afirmația rezultă imediat. Presupunem afirmația adevărată pentru k şi demonstrăm pentru $k+1$. Avem din relațiile (38)

$$p_{k+1}(x_j^k)p_{k+1}(x_{j+1}^k)=b_k^4 p_{k-1}(x_j^k)p_{k-1}(x_{j+1}^k)<0, j=\overline{1,k-1}$$

$$p_{k+1}(x_1^k)=-b_k^2 p_{k-1}(x_1^k),\ p_{k+1}(x_k^k)=-b_k^2 p_{k-1}(x_k^k).$$

$$\lim_{x\to-\infty} p_k(x)=+\infty, k\ge 1\ \lim_{x\to+\infty} p_k(x)=(-1)^k\infty, k\ge 1.$$

Prin urmare există $x_{j+1}^{k+1}\in(x_j^k,x_{j+1}^k)$ astfel încât $p_{k+1}(x_{j+1}^{k+1})=0, j=\overline{1,k-1}$. Dar $\lim\limits_{x\to-\infty} p_k(x)>0, k\ge 1$, respectiv $\lim\limits_{x\to+\infty} p_k(x), k\ge 1$ are semnul $(-1)^k$. Avem astfel $\lim\limits_{x\to+\infty} p_{k+1}(x)p_{k+1}(x_k^k)<0$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} p_{k+1}(x)p_{k+1}(x_1^k)<0$. De aici rezultă că există $x_1^{k+1}\in(-\infty,x_1^k)$ şi $x_{k+1}^{k+1}\in(x_k^k,+\infty)$ astfel încât $p_{k+1}(x_1^{k+1})=p_{k+1}(x_{k+1}^{+k1})=0$. ($iv$) Este suficient să observăm că prima condiție din definiția şirului Sturm este îndeplinită. Avem

$$p_n'(x_i^n)<0, p_{n-1}(x_i^n)>0, \text{ pentru } i \text{ impar};$$

$$p_n'(x_i^n)>0, p_{n-1}(x_i^n)<0 \text{ pentru } i \text{ par}.$$

(v) Pentru $a<x_1^n$ avem $i(a)=0$. Folosind acum Propoziția 6.23. obținem rezultatul.

Algoritmul bisecției

Vom considera un interval (a_0,b_0) care conține toate valorile proprii ale lui A. Spre exemplu $a_0=-(\|A\|_\infty+1), b_0=\|A\|_\infty+1$.

Valorile proprii ale lui A sunt $x_1^n<x_2^n<\dots<x_n^n$. Fie $k\in\{1,\dots,n\}$.

Vrem să determinăm valoarea proprie x_k^n. Considerăm $\lambda_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Dacă $i(\lambda_1) \le k-1$ construim $a_1 = \lambda_1; b_1 = b_0$. Dacă $i(\lambda_1) \ge k$ construim $b_1 = \lambda_1; a_1 = a_0$. Intervalul (a_1, b_1) conţine valoarea proprie x_k^n. Iterând această construcţie, obţinem un şir de intervale $\{(a_i, b_i)\}_{0 \le i \le j}$ cu proprietăţile $i(a_i) \le k-1$, $i(b_i) \ge k$. Notăm $\lambda_{j+1} = \frac{a_j + b_j}{2}$.

Dacă $i(\lambda_{j+1}) \le k-1$ vom construi $a_{j+1} = \lambda_{j+1}; b_{j+1} = b_j$. Dacă $i(\lambda_{j+1}) \ge k$ vom construi $b_{j+1} = \lambda_{j+1}; a_{j+1} = a_j$. Intervalul (a_j, b_j) conţine valoarea proprie x_k^n şi $\left|\lambda_{j+1} - x_k^n\right| \le \frac{b_0 - a_0}{2^{j+1}}$.

Teorema 6. 25 *Fie* $x \in R$, *valoare proprie pentru matricea A. Definim*

$$v_1 = 1; v_i = \frac{(-1)^{i-1} p_{i-1}(x)}{b_2 b_3 \dots b_i}, i = \overline{2,n}$$

unde $\{p_i\}_{1 \le i \le n}$ *sunt polinoamele definite de relaţiile* (38). *Atunci* $v = (v_1, \dots, v_n)$ *este vector propriu corespunzător valorii proprii x.*

Demonstraţie. Este suficient să observăm că $v = (v_1, \dots, v_n)$ satisface relaţiile

$$(a_1 - x)v_1 + b_2 v_2 = 0$$

$$b_2 v_1 + (a_2 - x)v_2 + b_3 v_3 = 0$$

....

$$b_i v_{i-1} + (a_i - x)v_i + b_{i+1} v_{i+1} = 0$$

....

$$b_n v_{n-1} + (a_n - x)v_n$$

Capitolul 7

Metode numerice pentru rezolvarea sistemelor neliniare

Teoremele care demonstrează existența soluțiilor unor sisteme de ecuații, nu conduc în general la obținerea unui algoritm de calculare a acestora.

Fie G o mulțime din R^n.

Metodele ce urmează permit aproximarea soluțiilor unor sisteme de forma:

(1) $$F(x) = 0, F: G \to R^n .$$

7.1 Metoda contracției

Fie $(E, \| \ \|)$ un spațiu normat.

O aplicație $g: E \to E$ se numeşte *contracție*, dacă există $q \in (0,1) \subset R$ astfel încât

(2) $$\|g(x) - g(y)\| \le q\|x - y\|$$

pentru orice $x, y \in E$. Numărul q se numeşte *constanta de contracție*.

Observăm că o contracție este o funcție uniform continuă.

Teorema 7.1 (Principiul contracțiilor). *Fie* $(E, \| \ \|)$ *un spațiu Banach şi* $g: E \to E$ *o contracție cu constanta de contracție q. Atunci*:

(i) *Există şi este unic* $z \in E$, *astfel încât* $g(z) = z$.

(*ii*) *Pentru orice* $x^0 \in E$, *şirul* $(x^k)_{k\geq 0}$, *definit prin* $x^{k+1} = g(x^k), k \geq 0$ *este convergent la z.*
(*iii*) *Pentru orice* $k \geq 1$ *avem*

$$\|x^k - z\| \leq \frac{q}{1-q}\|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|$$

Demonstraţie. (*i*), (*ii*). Vom arăta că şirul $(x^k)_{k\geq 0}$ este şir Cauchy. Din proprietatea contracţiei avem

$$\|x^k - x^l\| = \|g(x^{k-1}) - g(x^{l-1})\| \leq q\|x^{k-1} - x^{l-1}\|, k \geq 1, l \geq 1.$$

De aici prin recurenţă avem

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq q\|x^k - x^{k-1}\| \leq q^2\|x^{k-1} - x^{k-2}\| \leq \ldots \leq q^k\|x^1 - x^0\|, k \geq 1$$

$$\|x^{k+p} - x^k\| \leq \|x^{k+p} - x^{k+p-1}\| + \|x^{k+p-1} - x^{k+p-2}\| + \ldots + \|x^{k+1} - x^k\|, k \geq 1, p \geq 1$$

$$\|x^{k+p} - x^k\| \leq q^k(q^{p-1} + \ldots + 1)\|x^1 - x^0\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|, k \geq 1, p \geq 1.$$

Deoarece $q^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, şirul $(x^k)_{k\geq 0}$ este şir Cauchy în E. Prin urmare există $z \in E$, astfel încât $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} z$. Trecând la limită în definiţia recurentă a şirului avem $g(z) = z$. Pentru a demonstra unicitatea punctului z, presupunem prin reducere la absurd că există $z' \in E, z' \neq z$, astfel încât $g(z') = z'$. Avem

$$\|z - z'\| = \|g(z) - g(z')\| \leq q\|z - z'\| < \|z - z'\|$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. (*iii*).Pentru $k \geq 1, p \geq 0$, avem

$$\|x^{k+p} - x^k\| \leq \|x^{k+p} - x^{k+p-1}\| + \|x^{k+p-1} - x^{k+p-2}\| + \ldots + \|x^{k+1} - x^k\| \leq$$

$$\leq q(1 + \ldots + q^{p-1})\|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{q}{1-q}\|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|$$

Trecând la limită după p în relaţia de mai jos

$$\left\|x^{k+p}-x^{k}\right\| \leq \frac{q}{1-q}\left\|x^{k}-x^{k-1}\right\| \leq \frac{q^{k}}{1-q}\left\|x^{1}-x^{0}\right\|$$

obţinem (*iii*).

Observaţia 7.2 *Teorema 7.1 este adevărată, dacă mulţimea* $E \subset R^n$ *este o mulţime închisă şi* $g: E \to E$ *este o contracţie cu constanta de contracţie* q.

Propoziţia 7.3 *Fie* $r > 0, c \in R^n$ *şi mulţimea* E *o sferă închisă în* R^n, $E = \overline{B(c,r)} = \{x \mid x \in R^n, \|x - c\| \leq r\}$, *unde am folosit în* R^n *o norma arbitrară. Dacă* $g: E \to K^n$ *are proprietatea, există* $q \in (0,1)$, *astfel încât pentru orice* $x, y \in E$ *avem*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq q\|x - y\|$$
$$\|g(c) - c\| \leq (1 - q)r$$

Atunci avem relaţia $g(E) \subset E$.

Demonstraţie. Pentru orice $x \in E$ avem

$$\|g(x) - c\| \leq \|g(x) - g(c)\| + \|g(c) - c\| \leq q\|x - c\| + (1 - q)r \leq qr + (1 - q)r = r$$

ceea ce demonstrează propoziţia.

Vom considera în R^n produsul scalar euclidian. Considerăm o aplicaţie $f: E \subset R^n \to R^n$ *strict monotonă*, ceea ce înseamnă că există $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in E$ avem proprietatea

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \mu\|x - y\|^2,$$

unde norma este cea indusă de produsul scalar. Presupunem că aplicaţia este şi *lipschitziană*, ceea ce înseamnă că există $L > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in E$ avem proprietatea

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Construim pentru constanta $\sigma > 0$ aplicaţia

$$g: E \to R^n, \ g(x) = x - \sigma f(x).$$

Pentru orice $x, y \in E$ avem

$$\|g(x)-g(y)\|^2 = \langle x-\sigma f(x)-y+\sigma f(y), x-\sigma f(x)-y+\sigma f(y)\rangle =$$
$$= \|x-y\|^2 - \sigma\langle f(x)-f(y), x-y\rangle - \sigma\langle x-y, f(x)-f(y)\rangle + \sigma^2\|f(x)-f(y)\|^2 \le$$
$$\le (1-2\sigma\mu+\sigma^2L^2)\|x-y\|^2$$

Aplicația g este lipschitziană.

Fie $m: R_+ \to R, m(\sigma)=\sqrt{1-2\sigma\mu+\sigma^2L^2}$. Funcția g este contracție pentru valorile $\sigma \in (0, \frac{2\mu}{L^2})$. Valoarea de minim a lui m este $\sqrt{1-\frac{\mu^2}{L^2}}$ pentru $\sigma = \frac{\mu}{L^2}$. Să observăm că pentru $x, y \in E$ avem

$$\mu\|x-y\|^2 \le \langle f(x)-f(y), x-y\rangle \le \|f(x)-f(y)\|\|x-y\| \le L\|x-y\|^2,$$

de unde $\mu\|x-y\| \le \|f(x)-f(y)\| \le L\|x-y\|$.

Teorema 7. 4 *Fie $c \in R^n, r>0$ și $E=\overline{B(c,r)}$. Considerăm în notațiile de mai sus funcția f strict monotonă și lipschitziană cu condiția $\|f(c)\| \le \frac{\mu r}{2}$. Alegem $\sigma \in (0, \frac{\mu}{L^2})$. Atunci :*

(i) Există și este unic $z \in E$ astfel încât $f(z)=0$.

(ii) Pentru orice $x^0 \in E$, șirul $(x^k)_{k\ge 0}$, definit prin

$$x^{k+1} = x^k - \sigma f(x^k), k \ge 0$$

este convergent la z.

(iii) Pentru orice $k \ge 1$ avem

$$\|x^k - z\| \le \frac{\|f(x^k)\|}{\mu} \le \frac{q^k}{\mu}\|f(x^0)\|$$

unde $q=\sqrt{1-2\sigma\mu+\sigma^2L^2}$.

Demonstrație.(*i*),(*ii*). Funcția $g: E \to R^n, g(x)=x-\sigma f(x)$ este o contracție, cu constanta de contracție q și are proprietatea din Propoziția 7.3, deoarece avem:

$$\|g(c)-c\| = \frac{\sigma}{1-q}\|f(c)\| = \frac{1+q}{2\mu-\sigma L^2}\|f(c)\| \le \frac{2}{2\mu-\sigma L^2}\|f(c)\| \le \frac{2}{\mu}\|f(c)\| \le r .$$

Se aplică apoi Observaţia 7.2.

(*iii*). Pentru orice $k \ge 1$, folosind strict monotonia funcţiei f avem

$$\mu\|x^k - z\| \le \|f(x^k)\|.$$

De aici avem

$$\|x^k - z\| \le \frac{\|f(x^k)\|}{\mu} = \frac{1}{\sigma\mu}\|x^{k+1} - x^k\| \le \frac{q^k}{\sigma\mu}\|x^1 - x^0\| = \frac{q^k}{\mu}\|f(x^0)\|.$$

7.2 Metoda Newton

Propoziţia 7.5 *Fie $D \subset R^n$ o mulţime deschisă şi $f \in C^1(D)$ o funcţie care satisfăce condiţiile:*

(*i*) *Pentru orice $x \in D$ există $(f'(x))^{-1}$.*

(*ii*) *Există $L > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D$ avem $\|f'(x)\| \le L$.*

(*iii*) *Există $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D$ avem $\|(f'(x))^{-1}\| \le \frac{1}{\mu}$.*

Atunci pentru orice $c \in D$ există o sferă $B(c,r) \subset D$ astfel încât: pentru orice $x, y \in B(c,r)$ avem:

$$\mu\|x-y\| \le \|f(x)-f(y)\| \le L\|x-y\|.$$

Demonstraţie. Fie $c \in D$. Deoarece există $(f'(c))^{-1}$, din Teorema de inversare locală, există două mulţimi deschise $U \subset D, V \subset f(D)$, astfel încât $c \in U$ şi $f: U \to V$ este bijectivă cu $f^{-1}: V \to U$, funcţie de clasă 1 pe V. Fie $\varepsilon > 0$, astfel încât $B(f(c),\varepsilon) \subset V$. Alegem $r = \frac{\varepsilon}{L}$. Pentru $x \in B(c,\frac{\varepsilon}{L})$, folosind Teorema lui Lagrange, aplicată punctelor $x, c \in B(c,r)$ avem

$$\|f(x)-f(c)\| \le \|f'(u)\|\|x-c\|, u \in B(c,r)$$

de unde $\|f(x)-f(c)\| \le L\|x-c\| < \varepsilon$. Astfel $B(c,r) \subset U$.

Fie acum $x, y \in B(c,r)$. Folosind Teorema lui Lagrange, aplicată punctelor $x, y \in B(c,r)$, avem

$$\|f(x)-f(y)\| \le \|f'(v)\|\|x-y\|, v \in S(c,r) \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \le L\|x-y\|$$
$$\|f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(y))\| \le \|(f^{-1})'(w)\|\|f(x)-f(y)\|, w \in B(f(c),\varepsilon)$$

Din ultima relaţie obţinem a doua inegalitate

$$\|x-y\| \le \|(f'(f^{-1}(w)))^{-1}\|\|f(x)-f(y)\| \le \frac{1}{\mu}\|f(x)-f(y)\|.$$

Propoziţia 7.6 *Fie* $D \subset R^n$ *o mulţime deschisă şi* $f \in C^2(D)$, *o funcţie care satisface condiţiile*:

(a) *Există* $z \in D$ *astfel încât* $f(z)=0$ *şi există* $(f'(z))^{-1}$.

(b) *Există* $M > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in D$ *avem* $\|f''(x)\| \le M$.

Atunci există o sferă $B(z,\rho) = \{x | x \in R^n, \|x-z\| < \rho\} \subset D$ *astfel încât*:

(i) *Există* $(f'(x))^{-1}$ *pentru orice* $x \in B(z,\rho)$.

(ii) *Există* $\mu > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(z,\rho)$ *avem* $\|(f'(x))^{-1}\| \le \frac{1}{\mu}$.

Demonstraţie. Deoarece D este mulţime deschisă, există $B(z,r) \subset D$. Pentru orice $x \in B(z,r)$, din teorema lui Lagrange, aplicată lui f' avem $f'(x) = f'(z) + R(x,z)$, unde $\|R(x,z)\| \le M\|x-z\|$. Prin urmare

$$f'(x) = f'(z)[I + (f'(z))^{-1}R(x,z)].$$

Dacă $\|(f'(z))^{-1}R(x,z)\| < 1$ atunci există $(f'(x))^{-1}$. Dacă alegem

$$\rho < \min(r, \frac{1}{M\|(f'(z))^{-1}\|})$$

pentru orice $x \in B(z,\rho)$ avem

$$\|(f'(x))^{-1}\| \le \frac{\|(f'(z))^{-1}\|}{1 - M\|(f'(z))^{-1}\|\rho}.$$

Alegem $\mu = \dfrac{1 - M\|(f'(z))^{-1}\|\rho}{\|(f'(z))^{-1}\|}$.

Teorema 7.7 (Teorema lui Newton). *Fie* $D \subset R^n$ *o mulțime deschisă și* $f \in C^2(D)$, *o funcție care satisface condițiile:*

(a) *Există* $z \in D$ *astfel încât* $f(z) = 0$ *și există* $(f'(z))^{-1}$.

(b) *Există* $M > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in D$ *avem* $\|f''(x)\| \leq M$. *Atunci pentru* $q \in (0,1)$, *există* $r > 0$, *există* $\mu > 0$ *astfel încât*

(i) *Pentru orice* $x^0 \in B(z,r)$, *șirul* $(x^k)_{k \geq 0}$, *definit prin*

$$x^{k+1} = x^k - (f'(x^k))^{-1} f(x^k), k \geq 0$$

este în $B(z,r)$ *și este convergent la z.*

(ii) *Ecuația* $f(x) = 0$ *admite o singură soluție z în* $B(z,r)$.

(iii) *Pentru orice* $k \geq 1$ *avem* $\|x^k - z\| \leq \dfrac{2\mu}{M} q^{2^k}$.

(iv) *Pentru orice* $k \geq 1$ *avem* $\|x^k - z\| \leq \dfrac{\|f(x^k)\|}{\mu} \leq \dfrac{M}{2\mu}\|x^k - x^{k-1}\|^2$.

Șirul definit prin relația (ii) se numește *șirul lui Newton.*

Demonstrație. (i) Din Propoziția 7.4 există o sferă $B(z,\rho) \subset D$ astfel încât pentru orice $x \in S(z,\rho)$ există $(f'(x))^{-1}$ și există $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(z,\rho)$ avem $\|(f'(x))^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\mu}$. Pentru orice $x \in B(z,\rho)$, din Teorema lui Lagrange, avem $\|f'(x) - f'(z)\| \leq M\rho$. De aici $\|f'(x)\| \leq \|f'(z)\| + M\rho$. Micșorăm raza sferei $B(z,\rho) \subset D$ astfel încât pentru q ales să avem $\rho < \dfrac{2\mu q}{M}$. Demonstrăm prin inducție matematică că pentru $x^0 \in B(z,\rho)$ șirul $(x^k)_{k \geq 0}$ are elementele în $B(z,\rho)$. Presupunem că $x^{k-1} \in B(z,\rho), k \geq 1$. Din teorema lui Taylor avem

$$0 = f(z) = f(x^{k-1}) + f'(x^{k-1})(z - x^{k-1}) + R(z,x^{k-1}), \|R(z,x^{k-1})\| \leq \frac{M}{2}\|x^{k-1} - z\|^2$$

Folosind acum și definiția șirului obținem

$$x^k - z = x^{k-1} - z - (f'(x^{k-1}))^{-1} f(x^{k-1}) \Leftrightarrow x^k - z = -(f'(x^{k-1}))^{-1} R(z, x^{k-1})$$

de unde

$$\left\|x^k - z\right\| \le \frac{M}{2\mu}\left\|x^{k-1} - z\right\|^2 < \frac{M}{2\mu}\rho\left\|x^{k-1} - z\right\| < \rho .$$

Din alegerea lui ρ avem inegalitățile $\left\|x^k - z\right\| \le q\left\|x^{k-1} - z\right\| \le \ldots \le q^k\left\|x^0 - z\right\|$, de unde $x^k \to z$. (*ii*) Folosim acum Propoziția 7.5. Micşorând, eventual, sfera $B(z,\rho)$, pentru orice $x, y \in B(z,\rho)$ avem $\mu\|x - y\| \le \|f(x) - f(y)\|$. Presupunem acum prin reducere la absurd că există $z, z' \in B(z,\rho)$ astfel încât $f(z) = f(z') = 0$. Prin urmare avem şi $\mu\|z - z'\| \le \|f(z) - f(z')\| = 0$, de unde obținem $z = z'$. (*iii*) Notând, pentru $k \ge 0$, $\rho_k = \frac{M}{2\mu}\left\|x^k - z\right\|$ avem relația

$$\rho_k \le \rho_{k-1}^2,\ k \ge 1.$$

Prin recurență obținem $\rho_k \le \rho_0^{2^k}$ cu $\rho_0 = \frac{M}{2\mu}\left\|x^0 - z\right\| \le q$ avem (*iii*).

(*iv*) Din teorema lui Taylor aplicată punctelor $x^k, x^{k-1}, k \ge 1$ avem

$$f(x^k) = f(x^{k-1}) + f'(x^{k-1})(x^k - x^{k-1}) + R(x^k, x^{k-1}), \left\|R(x^k, x^{k-1})\right\| \le \frac{M}{2}\left\|x^k - x^{k-1}\right\|^2$$

Folosind acum inegalitatea

$$\mu\left\|x^k - z\right\| \le \left\|f(x^k) - f(z)\right\| = \left\|f(x^k)\right\|$$

şi definiția şirului Newton avem

$$\left\|x^k - z\right\| \le \frac{1}{\mu}\left\|f(x^k)\right\| = \frac{1}{\mu}\left\|R(x^k, x^{k-1})\right\| \le \frac{M}{2\mu}\left\|x^k - x^{k-1}\right\|^2 .$$

Teorema 7.8 (Teorema lui Newton - simplificată). *Fie* $D \subset R^n$ *o mulțime deschisă şi* $f \in C^2(D)$, *o funcție care satisface condițiile*:

(*a*) *Există* $z \in D$ *astfel încât* $f(z) = 0$ *şi există* $(f'(z))^{-1}$.

(*b*) *Există* $M > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in D$ *avem* $\|f''(x)\| \le M$. *Atunci pentru* $q \in (0,1)$, *există* $r > 0$, *astfel încât*:

(i) *Pentru orice* $x \in B(z,r)$ *există* $(f'(x))^{-1}$. *Există* $L > 0$, *există* $\mu > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(z,r)$ *avem* $\|(f'(x))^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}, \|f'(x)\| \leq L$.

(ii) *Ecuaţia* $f(x) = 0$ *admite o singură soluţie z în* $B(z,r)$.

(iii) *Pentru orice* $c \in B(z,r)$ *şi orice* $x^0 \in B(z,r)$, *şirul* $(x^k)_{k\geq 0}$, *definit prin*

$$x^{k+1} = x^k - (f'(c))^{-1} f(x^k), k \geq 0$$

este în $B(z,r)$ *şi este convergent la z.*

(iv) *Pentru orice* $k \geq 1$ *avem* $\|x^k - z\| \leq \frac{\|f(x^k)\|}{\mu} \leq \frac{L}{\mu}\|x^k - x^{k-1}\|$.

Şirul definit prin relaţia (ii) se numeşte *şirul Newton simplificat.*

Demonstraţie. (i) Din Propoziţiile 7.4 şi respectiv 7.5, există o sferă $B(z,\rho) \subset D$, astfel încât pentru orice $x \in B(z,\rho)$, există $(f'(x))^{-1}$ şi există $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(z,\rho)$ avem $\|(f'(x))^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$. Pentru orice $x, y \in B(z,\rho)$ avem

$$\mu\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|,$$

unde $L = \|f'(z)\| + M\rho$. (ii) Presupunem acum prin reducere la absurd că există $z, z' \in B(z,\rho)$ astfel încât $f(z) = f(z') = 0$. Folosim acum inegalitatea obţinută mai sus $\mu\|z - z'\| \leq \|f(z) - f(z')\| = 0$, de unde $z = z'$. (iii) Pentru $q \in (0,1)$ construim $\rho \leq \min(r, \frac{2q\mu}{3M})$ şi demonstrăm prin inducţie matematică că pentru $x^0, c \in B(z,\rho)$ şirul $(x^k)_{k\geq 0}$ are elementele în $B(z,\rho)$. Presupunem că $x^{k-1} \in B(z,\rho), k \geq 1$. Din teorema lui Taylor avem:

$$f(x^{k-1}) = f(z) + f'(z)(x^{k-1} - z) + R(x^{k-1}, z), \|R(x^{k-1}, z)\| \leq \frac{M}{2}\|x^{k-1} - z\|^2$$

Folosind acum şi definiţia şirului obţinem:

$$\|x^k - z\| \leq \|(f'(c))^{-1}\|(\|f'(c) - f'(z)\|\|x^{k-1} - z\| + \|R(x^{k-1}, z)\|) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu}(M\|c - z\| + \frac{M}{2}\|x^{k-1} - z\|)\|x^{k-1} - z\| \leq \frac{3M}{2\mu}\rho\|x^{k-1} - z\| \leq q\|x^{k-1} - z\|$$

de unde

$$\|x^k - z\| < \rho \quad , \|x^k - z\| \le q^k \|x^0 - z\| \text{ şi } x^k \to z .$$

(*iv*) Pentru orice $k \ge 1$, din demonstrația proprietății (*i*), pentru $x = x^k, y = z$ avem $\mu\|x^k - z\| \le \|f(x^k)\|$. Din definiția şirului avem $f(x^k) = f'(c)(x^k - x^{k+1})$.

Prin urmare $\|x^k - z\| \le \frac{1}{\mu}\|f(x^k)\| \le \frac{L}{\mu}\|x^k - x^{k+1}\|$.

Exemplu. *Metoda Newton pentru determinarea celei mai mari rădăcini a unei ecuații polinomiale cu toate rădăcinile reale.*

Fie $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, a_i \in R, i = \overline{0,n}, a_0 > 0$ cu rădăcinile $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge ... \alpha_n$.

Demonstrăm prin metoda inducției că pentru orice $x_0 > \alpha_1$, şirul Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$, converge strict descrescător către α_1 şi este strict mai mare decât α_1. Pentru $x > \alpha_1$ avem $P(x) > 0, P'(x) > 0, P''(x) > 0$. Din definiția şirului, avem $x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} < x_0$. Din formula Taylor avem:

$$P(\alpha_1) = P(x_0) + P'(x_0)(\alpha_1 - x_0) + \frac{P''(\delta)}{2}(\alpha_1 - x_0)^2, \delta \in (x_0, \alpha_1).$$

De aici

$$\frac{P(x_0)}{P'(x_0)} + \alpha_1 - x_0 = -\frac{P''(\delta)}{2P'(x_0)}(\alpha_1 - x_0)^2 < 0 \Rightarrow x_1 > \alpha_1 .$$

Presupunem acum $x_k > \alpha_1, x_k < x_{k-1}, k \ge 1$. Avem $x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(xk_n)} < x_k$. Din formula Taylor avem:

$$P(\alpha_1) = P(x_k) + P'(x_k)(\alpha_1 - x_k) + \frac{P''(\delta_k)}{2}(\alpha_1 - x_k)^2, \delta_k \in (x_k, \alpha_1).$$

De aici

$$\frac{P(x_k)}{P'(x_k)} + \alpha_1 - x_k = -\frac{P''(\delta_k)}{2P'(x_k)}(\alpha_1 - x_k)^2 < 0 \Rightarrow x_{k+1} > \alpha_1 .$$

Capitolul 8

Interpolare

8.1 Polinom de interpolare

Vom nota prin K mulțimea numerelor reale sau complexe.

Considerăm numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, distincte două câte două și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in N \setminus \{0\}$. Fie $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Considerăm numerele $z_{ij} \in K$ pentru $i = \overline{1,n}, j = \overline{0, \alpha_i - 1}$.

Teorema 8. 1 *Există și este unic un polinom P, cu coeficienți în K, de grad cel mult m - 1, astfel încât*

$$P^{(j)}(x_i) = z_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{0, \alpha_i - 1}.$$

Polinomul P se numește polinomul de interpolare asociat nodurilor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ *cu multiplicitățile* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in N \setminus \{0\}$ *respectiv și datelor* $z_{ij} \in K$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{0, \alpha_i - 1}$.

Demonstrație. Fie P_{m-1} mulțimea polinoamelor cu coeficienți în K de grad cel mult m - 1. P_{m-1} este K spațiu vectorial de dimensiune m. Considerăm aplicația

$$F: \mathsf{P}_{m-1} \to K^m$$
$$F(P) = (P^{(j)}(x_i)), i = \overline{1,n}, j = \overline{0, \alpha_i - 1}.$$

Aplicația F este K-liniară. Pentru a demonstra teorema trebuie să demonstrăm că F este bijectivă. Cum spațiul de definiție al lui F și spațiul de valori al lui F sunt de aceiaşi dimensiune finită m, este suficient să demonstrăm că F este injectivă. Fie $P \in \mathrm{P}_{m-1}$ astfel încât

$$F(P)=0 \Leftrightarrow P^{(j)}(x_i)=0, i=\overline{1,n}, j=\overline{0,\alpha_i-1}.$$

Relaţia de mai sus arată că polinomul P se divide cu polinomul $\omega(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)^{\alpha_j}$, al cărui grad este m. Cum gradul lui P este cel mult m-1, rezultă că P este polinomul identic nul.

Teorema 8.2 (Formula lui Hérmite). *Polinomul P din Teorema* 8.1 *are forma*:

$$(1)\quad P(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}z_{ij}\frac{1}{j!}(x-x_i)^j\sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1}\frac{1}{k!}(x-x_i)^k\left(\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right)^{(k)}\Bigg|_{x=x_i}$$

unde $\omega(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)^{\alpha_j}$.

Demonstraţie. Pentru $i=\overline{1,n}, j=\overline{0,\alpha_i-1}$, conform Teoremei 8.1, există şi este unic un polinom H_{ij}, de grad cel mult m - 1, care satisface condiţiile

$$(2)\qquad H_{ij}^{(k)}(x_l)=\delta_{il}\delta_{jk}, l=\overline{1,n}, k=\overline{0,\alpha_l-1}.$$

Atunci avem

$$(3)\qquad P(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}z_{ij}H_{ij}(x)$$

deoarece gradul lui P este $\le m-1$ şi $P^{(k)}(x_l)=z_{lk}, l=\overline{1,n}, k=\overline{0,\alpha_l-1}$.

Pentru i, j fixaţi, $i=\overline{1,n}, j=\overline{0,\alpha_i-1}$ sunt adevărate relaţiile $H_{ij}^{(k)}(x_l)=0, l\neq i, k=\overline{0,\alpha_l-1}, H_{ij}^{(k)}(x_i)=0, k\neq j, k=\overline{0,\alpha_l-1}, H_{ij}^{(j)}(x_i)=1$. Prin urmare există un polinom r_{ij} cu coeficienţi în K, de grad cel mult α_i-j-1, astfel încât

(4) $$H_{ij}(x) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} (x - x_l)^{\alpha_l} (x - x_i)^j r_{ij}(x).$$

Prelungind funcţia $h_i(x) = \dfrac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}}, x \in K \setminus \{x_i\}$ prin analiticitate în punctul x_i avem

$$H_{ij}(x) = h_i(x)(x - x_i)^j r_{ij}(x).$$

Scriem acum H_{ij} sub formă Taylor în raport cu x_i

(5) $$H_{ij}(x) = \frac{1}{j!}(x - x_i)^j + \frac{H_{ij}^{(\alpha_i)}(x_i)}{\alpha_i!}(x - x_i)^{\alpha_i} + \ldots + \frac{H_{ij}^{(m-1)}(x_i)}{(m-1)!}(x - x_i)^{m-1}.$$

Funcţia

$$g_{ij}(x) = \frac{H_{ij}(x)}{(x - x_i)^j}, x \neq x_i, g_{ij}(x_i) = \frac{1}{j!}$$

este o funcţie analitică.

Scriem acum r_{ij} sub formă Taylor în raport cu x_i

(6) $$r_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} \frac{r_{ij}^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k.$$

Din (4) avem

$$r_{ij}(x) = \frac{g_{ij}(x)}{h_i(x)}$$

care este o funcţie olomorfă pe o vecinătate a punctului x_i. Pe această vecinătate, pentru orice k avem

(7) $$r_{ij}^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l g_{ij}^{(l)}(x) \left(\frac{1}{h_i}\right)^{(k-l)}(x).$$

Calculând în punctul $x = x_i$ avem

(8) $$r_{ij}^{(k)}(x_i)=\frac{1}{j!}\left(\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right)^{(k)}\Bigg|_{x=x_i}$$

Înlocuind rezultatul obţinut în (6) şi (4) se obţine (1).

Observaţie 8.3 *Dacă* $x_1,x_2,\dots,x_n\in R$ *şi numerele* $z_{ij}\in R$ *pentru* $i=\overline{1,n}, j=\overline{0,\alpha_i-1}$, *coeficienţii polinomului P sunt reali.*

Consecinţa 8. 4 (Formula lui Lagrange). *În condiţiile Teoremei* 8. 2. *dacă* $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=1$, *polinomul de interpolare are forma*

(9) $$P(x)=\sum_{i=1}^{n} z_{i0}\frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Demonstraţie. Este suficient să observăm că

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} z_{i0}\frac{\omega(x)}{x-x_i}\left(\frac{x-x_i}{\omega(x)}\right)\Bigg|_{x=x_i} \quad \text{cu } \omega(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i).$$

Consecinţa 8.5 *În condiţiile Teoremei 8. 2., dacă multiplicităţile nodurilor* $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=2$, *polinomul de interpolare are forma*

(10) $$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^2}\left[z_{i0}\left(\frac{2}{\omega''(x_i)}-\frac{2}{3}(x-x_i)\frac{\omega'''(x_i)}{(\omega''(x_i))^2}\right)+z_{i1}(x-x_i)\frac{2}{(\omega''(x_i))^2}\right].$$

Demonstraţie. Din (1) avem

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_i)^2}\left[z_{i0}\left(\frac{(x-x_i)^2}{\omega(x)}\Bigg|_{x=x_i}+(x-x_i)\left(\frac{(x-x_i)^2}{\omega(x)}\right)'\Bigg|_{x=x_i}\right)+z_{i1}(x-x_i)\left(\frac{(x-x_i)^2}{\omega(x)}\right)'\Bigg|_{x=x_i}\right]$$

unde $\omega(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$. Scriem sub forma Taylor, în raport cu x_i, ω şi ω'

$$\omega(x)=\sum_{k=2}^{2n}\frac{\omega^{(k)}(x_i)}{k!}(x-x_i)^k\ ;\ \omega'(x)=\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\omega^{(k+1)}(x_i)}{k!}(x-x_i)^k .$$

Este suficient să calculăm

$$\left.\frac{(x-x_i)^2}{\omega(x)}\right|_{x=x_i}=\lim_{x\to x_i}\frac{1}{\sum\limits_{k=2}^{2n}\frac{\omega^k(x_i)}{k!}(x-x_i)^{2k-2}}=\frac{2}{\omega''(x_i)}$$

$$\left.\left(\frac{(x-x_i)^2}{\omega(x)}\right)'\right|_{x=x_i}=\left.\frac{2(x-x_i)\omega(x)-(x-x_i)^2\omega'(x)}{(\omega(x))^2}\right|_{x=x_i}=\frac{2}{\omega''(x_i)}\left.\frac{2\omega(x)-(x-x_i)\omega'(x)}{(x-x_i)^3}\right|_{x=x_i}$$

$$\left.\frac{2\omega(x)-(x-x_i)\omega'(x)}{(x-x_i)^3}\right|_{x=x_i}=\lim_{x\to x_i}\frac{2\sum\limits_{k=2}^{2n}\frac{\omega^{(k)}(x_i)}{k!}(x-x_i)^k-(x-x_i)\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{\omega^{(k+1)}(x_i)}{k!}(x-x_i)^2}{(x-x_i)^3}=\frac{\omega'''(x_i)}{6}.$$

8.2 Polinom de interpolare asociat unei funcții. Diferențe divizate

Fie $f:D\subset K\to K$, $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subset D$, distincte două câte două și $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in N\setminus\{0\}$. Fie $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$. Presupunem că există $f^{(j)}(x_i)$, pentru $i=\overline{1,n}, j=\overline{0,\alpha_i-1}$. Notăm

$$\{z_1,z_2,\dots,z_m\}=\{\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{\alpha_1-ori},\underbrace{x_2,\dots,x_2}_{\alpha_2-ori},\dots,\underbrace{x_n,\dots,x_n}_{\alpha_n-ori}\}.$$

Polinomul de interpolare atașat funcției f, nodurilor $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subset D$ cu multiplicitățile $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in N\setminus\{0\}$ este polinomul dat de Teorema 8.1, pentru datele $z_{ij}=f^{(j)}(x_i)$, $i=\overline{1,n}, j=\overline{0,\alpha_i-1}$.

Notăm acest polinom prin $P(f;z_1,z_2,\dots,z_m;x)$. Acest polinom nu depinde de ordinea nodurilor.

Diferența divizată asociată funcției f și nodurilor $\{z_1,z_2,\dots,z_m\}$ este coeficientul lui x^{m-1} în $P(f;z_1,z_2,\dots,z_m;x)$. Acest număr se notează prin

(11) $$f[z_1,\dots,z_m].$$

Exemplu. *Pentru funcția* $f:C\to C, f(x)=x^3-i$, $z_1=z_2=i$, $z_3=1$, *scriem polinomul de interpolare cu ajutorul formulei Hérmite. În notațiile Teoremei 1.2 avem*

$\alpha_1=2,\alpha_2=1,\omega(x)=(x-i)^2(x-1)$,

$z_{10}=f(i)=-2i, z_{11}=f'(i)=-3, z_{20}=f(1)=1-i$ și

$$P(f;i,i,1;x)=(x-1)[z_{10}((\frac{1}{x-1})\Big|_{x=i}+(x-i)(\frac{1}{x-1})'\Big|_{x=i})+z_{11}(x-i)(\frac{1}{x-1})\Big|_{x=i}]+$$

$$+(x-i)^2z_{20}(\frac{1}{(x-i)^2})\Big|_{x=1}=(1+2i)x^2+(1-2i)x-1-i.$$

Teorema 8.6 (Aitken-Neville). *În notațiile de mai sus, dacă* $z_1\neq z_m$ *atunci*

(12) $$P(f;z_1,z_2,\dots,z_m;x)=\frac{1}{z_m-z_1}\left[P(f;z_2,\dots,z_m;x)(x-z_1)-P(f;z_1,\dots,z_{m-1};x)(x-z_m)\right].$$

Demonstrație. Considerăm polinomul de grad cel mult m - 1

$$Q(x)=\frac{1}{z_m-z_1}\left[P(f;z_2,\dots,z_m,x)(x-z_1)-P(f;z_1,\dots,z_{m-1},x)(x-z_m)\right].$$

Fără a particulariza, presupunem că $z_1=x_1$ și $z_m=x_n$. Calculăm

$$Q^{(k)}(x)=\frac{1}{x_m-x_1}\Big[P^{(k)}(f;z_2,\dots,z_m;x)(x-z_1)+kP^{(k-1)}(f;z_2,\dots,z_m;x)-$$
$$-P^{(k)}(f;z_1,\dots,z_{m-1};x)(x-z_m)-kP^{(k-1)}(f;z_1,\dots,z_{m-1};x)\Big].$$

Avem

$P^{(k)}(f;z_2,\dots,z_m;x_1)=f^{(k)}(x_1),k=\overline{0,\alpha_1-2}$,

$P^{(k)}(f;z_2,\dots,z_m;x_n)=f^{(k)}(x_n),k=\overline{0,\alpha_n-1}$,

$P^{(k)}(f;z_1,\dots,z_{m-1};x_1)=f^{(k)}(x_1),k=\overline{0,\alpha_1-1}$,

$P^{(k)}(f;z_1,\dots,z_{m-1};x_n)=f^{(k)}(x_n),k=\overline{0,\alpha_n-2}$,

$P^{(k)}(f;z_2,\dots,z_m;x_i)=f^{(k)}(x_i),i=\overline{2,n-1},k=\overline{0,\alpha_i-1}$.

Prin înlocuire obținem: $Q^{(k)}(x_i)=f^{(k)}(x_i),i=1,n,k=\overline{0,\alpha_i-1}$.

Din Teorema 8. 1. $Q(x) = P(f; z_1, z_2, \ldots, z_m; x), x \in K$.

Observație 8.7 (schema Aitken-Neville). *Dacă* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$, *notând* $P(f; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j; x) = p_{i,\ldots,j}(x)$, *polinomul de interpolare* $p_{1,\ldots,n}$ *se calculează recurent folosind următorul tablou*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
z_1 & & z_2 & & z_3 & \quad & z_{n-2} & & z_{n-1} & & z_n \\
p_1 & & p_2 & & p_3 & & p_{n-2} & & p_{n-1} & & p_n \\
& p_{12} & & p_{23} & & & & p_{n-2n-1} & & p_{n-1n} & \\
& & p_{123} & & & & & & p_{n-2n-1n} & & \\
& & & & & & & & & & \\
& & & p_{12\ldots n-1} & & & p_{23\ldots n} & & & & \\
& & & & & p_{12\ldots n} & & & & &
\end{array}
$$

Exemplu. Pentru $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0,+\infty), z_1 = 1; z_2 = 4; z_3 = 9$ avem:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & 4 & & 9 \\
1 & & 2 & & 3 \\
& \frac{1}{3}(x+2) & & \frac{1}{5}(x+6) & \\
& & \frac{1}{60}(-x^2 + 25x + 36) & &
\end{array}
$$

$P(f; 1,4,9; x) = \frac{1}{60}(-x^2 + 25x + 36)$.

Teorema 8. 8 *În notațiile de mai sus avem*

(*i*) $f[z_1, z_2, \ldots, z_m] = f[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(m)}]$, *pentru orice permutare* σ *a mulțimii* $\{1, \ldots, m\}$.

(*ii*) *Dacă* $z_1 \neq z_m$ *atunci*:

(13) $$f[z_1, z_2, \ldots, z_m] = \frac{1}{z_m - z_1}\{f[z_2, \ldots, z_m] - f[z_1, \ldots, z_{m-1}]\}.$$

(*iii*) *Dacă* $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$ *atunci*:

(14) $$f[\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{m-ori}] = \frac{f^{(m-1)}(z_1)}{(m-1)!}.$$

Demonstrație. (*i*). Polinomul de interpolare nu depinde de ordinea nodurilor. De aici rezultă relaţia.

(*ii*). Este suficient să identificăm în formula (12) coeficienţii lui x^{m-1}.

(*iii*). $P(x) = P(f;\underbrace{z_1,\dots,z_1}_{m-ori};x)$ este un polinom de grad cel mult m-1 care satisface relaţiile $P^{(k)}(z_1) = f^{(k)}(z_1), k = \overline{0,m-1}$. Scriind P sub formă Taylor, în raport cu z_1, avem $P(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(x-z_1)^k$. Din definiţia diferenţei divizate avem relaţia (14).

Observaţia 8.9 *Diferenţele divizate se calculează recursiv prin următorul tablou*:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
z_1 & & z_2 & & z_3 & & z_{m-2} & & z_{m-1} & & z_m \\
f(z_1) & & f(z_2) & & f(z_3) & & f(z_{m-2}) & & f(z_{m-1}) & & f(z_m) \\
& f[z_1,z_2] & & f[z_2,z_3] & & & & f[z_{m-2},z_{m-1}] & & f[z_{m-1},z_m] & \\
& & f[z_1,z_2,z_3] & & & & & & f[z_{m-2},z_{m-1},z_m] & & \\
& & & & f[z_1,\dots,z_{m-1}] & \dots & f[z_2,\dots,z_m] & & & & \\
& & & & & f[z_1,\dots,z_m] & & & & &
\end{array}
$$

Exemplu. Pentru $f(x) = e^x, x \in R, z_1 = 0; z_2 = 0; z_3 = 1, z_4 = 2$ avem:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 1 & & 2 \\
1 & & 1 & & e & & e^2 \\
& 1 & & e-1 & & e^2-e & \\
& & e-2 & & \frac{(e-1)^2}{2} & & \\
& & & \frac{e^2-4e+5}{4} & & &
\end{array}
$$

$f[0,0,1,2] = \frac{e^2-4e+5}{4}$.

Teorema 8. 10 (Formula lui Newton). *În notaţiile de mai sus sunt adevărate relaţiile*

(15) $$P(f;z_1,\dots,z_m;x) = P(f;z_1,\dots,z_{m-1};x) + f[z_1,\dots,z_m]\prod_{i=1}^{m-1}(x-z_i).$$

(16) $$P(f;z_1,\ldots,z_m;x)=f(z_1)+\sum_{i=2}^{m}f[z_1,\ldots,z_i]\prod_{j=1}^{i-1}(x-z_j).$$

Pentru orice $x\in D$ *avem*

(17) $$f(x)=P(f;z_1,\ldots,z_m;x)+f[z_1,\ldots,z_m,x]\prod_{i=1}^{m}(x-z_i)$$

Demonstrație. Considerăm polinomul de grad cel mult m - 1

$$Q(x)=P(f;z_1,\ldots,z_m;x)-P(f;z_1,\ldots,z_{m-1};x).$$

Am notat $\{z_1,z_2,\ldots,z_m\}=\{\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{\alpha_1\text{-ori}},\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{\alpha_2\text{-ori}},\ldots,\underbrace{x_n,\ldots,x_n}_{\alpha_n\text{-ori}}\}$.

Avem

$$Q^{(j)}(x_i)=0, i=\overline{1,n-1}, j=\overline{0,\alpha_i-1};\ Q^{(j)}(x_n)=0, j=\overline{0,\alpha_n-2},$$

presupunând că $z_m=x_n$. Deci polinomul Q se divide prin polinomul de grad m-1

$$\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)^{\alpha_i}(x-x_n)^{\alpha_n-1}.$$

Avem $Q(x)=k\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)^{\alpha_i}(x-x_n)^{\alpha_n-1}$. Egalăm acum coeficienții lui x^{m-1} în identitate. Se obține $k=f[z_1,\ldots,z_m]$ și prin urmare avem formula (15).

Deoarece $P(f;z_1;x)=f(z_1)$, iterând relația (15) se obține (16).

Fixăm $x\in D$. Pentru $y\in K$ avem

$$P(f;z_1,\ldots,z_m,x;y)=P(f;z_1,\ldots,z_m;y)+f[z_1,\ldots,z_m,x]\prod_{i=1}^{m}(y-z_i).$$

Înlocuind $y=x$ în formula de mai sus și ținând seama de relația $P(f;z_1,\ldots,z_m,x;x)=f(x)$, se obține (17).

Teorema 8. 11 (Formula integrală a diferențelor divizate). *Fie* $D\subset K$, *o mulțime deschisă și convexă,* $f\in C^{m-1}(D), m\geq 2$, $\{z_1,\ldots,z_m\}\subset D$. *Atunci*

$$(18)\quad f[z_1,\ldots,z_m]=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\ldots\int_0^{t_{m-2}} f^{(m-1)}(z_1+t_1(z_2-z_1)+\ldots+t_{m-1}(z_m-z_{m-1}))dt_{m-1}.$$

Demonstrație. Pentru că D este convexă pentru $t_1,t_2,\ldots,t_{m-1}\in[0,1]$ avem:

$$u_m=z_1+t_1(z_2-z_1)+\ldots+t_{m-1}(z_m-z_{m-1})=(1-t_1)z_1+(t_1-t_2)z_2+\ldots+t_{m-1}z_m\in D.$$

Mulțimea

$$Q_m=\{(t_1,t_2,\ldots,t_{m-1})|0\le t_1\le 1,0\le t_2\le t_1,\ldots,0\le t_{m-2}\le t_{m-1}\}\subset[0,1]^{m-1}$$

este o mulțime compactă. Funcția

$$H:D^m\times Q_m\to K, H(z_1,\ldots,z_m,t_1,\ldots,t_{m-1})=f^{(m-1)}(u_m)$$

este o funcție continuă. Atunci funcția

$$I:D^m\to K, I(z_1,\ldots,z_m)=\int_{Q_m} H(z_1,\ldots,z_m,t_1,\ldots,t_{m-1})=$$

$$\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\ldots\int_0^{t_{m-2}} f^{(m-1)}(z_1+t_1(z_2-z_1)+\ldots+t_{m-1}(z_m-z_{m-1}))dt_{m-1}$$

există și este continuă.

Vom demonstra pentru început formula (18) presupunând că nodurile sunt distincte. Demonstrația se face prin inducție dupa m. Pentru $m=2$ avem

$$\int_0^1 f'(z_1+t_1(z_2-z_1))dt_1=\frac{1}{z_2-z_1}f(z_1+t_1(z_2-z_1))\Big|_0^1=\frac{1}{z_2-z_1}[f(z_2)-f(z_1)]=f[z_1,z_2]$$

Presupunem formula adevărată pentru s noduri $s<m$. Avem

$$\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\ldots\int_0^{t_{s-1}} f^{(s)}(z_1+t_1(z_2-z_1)+\ldots+t_s(z_{s+1}-z_s))dt_s=$$

$$\frac{1}{z_{s+1}-z_s}\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\ldots\int_0^{t_{s-2}} f^{(s-1)}(z_1+t_1(z_2-z_1)+\ldots+t_s(z_{s+1}-z_s)\Big|_0^{t_{s-1}}dt_{s-1}=$$

$$\frac{1}{z_{s+1}-z_s}[\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1} dt_2\ldots\int_0^{t_{s-2}} f^{(s-1)}(z_1+t_1(z_2-z_1)+\ldots+t_{s-1}(z_{s+1}-z_{s-1})dt_{s-1}-$$

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{s-2}} f^{(s-1)}(z_1 + t_1(z_2 - z_1) + \ldots + t_{s-1}(z_s - z_{s-1}))dt_{s-1}] =$$

$$\frac{1}{z_{s+1} - z_s}\left[f[z_2, \ldots, z_{s-1}, z_{s+1}] - f[z_1, \ldots, z_{s-1}, z_s]\right] = f[z_1, \ldots, z_{s+1}].$$

Presupunem acum că nodurile $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset D$ nu sunt distincte. Fie $((z_1^k, \ldots, z_m^k))_{k \geq 0} \subset D^m$ un şir de puncte cu componentele distincte două câte convergent către $(z_1, \ldots, z_m) \subset D^m$. Avem

$$I(z_1^k, \ldots, z_m^k) = f[z_1^k, \ldots, z_m^k]$$
$$I(z_1^k, \ldots, z_m^k) \xrightarrow[k \to \infty]{} I(z_1, \ldots, z_m).$$

Este suficient să arătăm că $f[z_1^k, \ldots, z_m^k] \xrightarrow[k \to \infty]{} f[z_1, \ldots, z_m]$. Demonstraţia se face prin inducţie după numărul nodurilor, m, $m \geq 1$. Evident avem $f[z_1^k] \xrightarrow[k \to \infty]{} f[z_1]$. Presupunem afirmaţia adevărată pentru s-1 noduri, $s \leq m$. Pentru $z_1 = \ldots = z_s$ obţinem

$$I(z_1^k, \ldots z_s^k) \xrightarrow[k \to \infty]{} I(\underbrace{z_1, \ldots z_1}_{m\text{-ori}}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{s-2}} f^{(s-1)}(z_1)dt_{s-1} = \frac{f^{(s-1)}(z_1)}{(s-1)!} = f[\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{m-\text{ori}}].$$

Dacă $z_1 \neq z_s$ avem

$$f[z_1^k, \ldots, z_s^k] = \frac{1}{z_s^k - z_1^k}\{f[z_2^k, \ldots, z_s^k] - f[z_1^k, \ldots, z_{s-1}^k]\}$$

Folosind ipoteza de inducţie avem

$$\frac{1}{z_s^k - z_1^k}\{f[z_2^k, \ldots, z_s^k] - f[z_1^k, \ldots, z_{s-1}^k]\} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{z_s - z_1}\{f[z_2, \ldots, z_s] - f[z_1, \ldots, z_{s-1}]\} = f[z_1, \ldots, z_s].$$

Propoziţia 8. 12 *Fie* $D \subset K$, *o mulţime deschisă şi convexă,* $f \in C^m(D)$, $\{z_1, \ldots, z_m, x\} \subset D$. *Atunci*

(19) $$|f(x)-P(f;z_1,\dots,z_m;x)| \le \frac{|\omega(x)|}{m!} \sup_{t\in Q}|f^{(m)}(t)|, \omega(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-z_i)$$

unde $Q=\left\{z\in D \middle| z=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i z_i+\alpha x, \alpha_i\ge 0, i=\overline{1,n}, \alpha\ge 0, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\alpha=1\right\}$.

Demonstrație. Din (17),(18), (19) avem

$$f(x)=P(f;z_1,\dots,z_m;x)+f[z_1,\dots,z_m,x]\omega(x)$$

$$f[z_1,\dots,z_m,x]=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\dots\int_0^{t_{m-1}}f^{(m)}(z_1+t_1(z_2-z_1)+\dots+t_m(x-z_m))dt_m$$

$$|f[z_1,\dots,z_m,x]|\le \sup_{t\in Q}|f^{(n)}(t)|\left|\int_0^1 dt_1\dots\int_0^{t_{m-1}}dt_m\right| = \frac{\sup_{t\in Q}|f^{(n)}(t)|}{m!}$$

de unde se obține (19).

Propoziția 8.13 *Fie* $f:(a,b)\subset R\to R, f\in C^{m-1}(a,b)$. *Considerăm punctele* $\{z_1,\dots,z_m\}\subset(a,b)$ și $\alpha=\min\{z_1,\dots,z_m\}$ și $\beta=\max\{z_1,\dots,z_m\}$. *Atunci există* $\xi\in[\alpha,\beta]$ *astfel încât*

(20) $$f[z_1,\dots,z_m]=\frac{f^{(m-1)}(\xi)}{(m-1)!}.$$

Demonstrație. Notăm

$$m_{f^{m-1}}=\min_{y\in[\alpha,\beta]}f^{(m-1)}(y) \text{ și } M_{f^{m-1}}=\sup_{y\in[\alpha,\beta]}f^{(m-1)}(y).$$

Avem din (18)

$$m_{f^{m-1}}\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\dots\int_0^{t_{m-2}}dt_{m-1}\le f[z_1,\dots,z_m]\le M_{f^{m-1}}\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\dots\int_0^{t_{m-2}}dt_{m-1}$$

$$m_{f^{m-1}}\le f[z_1,\dots,z_m](m-1)!\le M_{f^{m-1}}.$$

Folosind proprietatea lui Darboux pentru $f^{(m-1)}$ pe $[\alpha,\beta]$ există $\xi\in[\alpha,\beta]$ astfel încât $f[z_1,\dots,z_m](m-1)!=f^{(m-1)}(\xi)$.

Propoziția 8.14 *Fie* $f:(a,b)\subset R\to R, f\in C^m(a,b)$. *Considerăm punctele* $\{z_1,\dots,z_m,x\}\subset(a,b)$, $\alpha_x=\min\{z_1,\dots,z_m,x\}$ *și* $\beta_x=\max\{z_1,\dots,z_m,x\}$. *Atunci există* $\xi_x\in[\alpha_x,\beta_x]$ *astfel încât*

$$(21)\qquad f(x)=P(f;z_1,\dots,z_m;x)+\frac{f^{(m)}(\xi_x)}{m!}\omega(x),\ \omega(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-z_i).$$

Demonstrație. Din Teorema 8. 10. avem identitatea

$$f(x)=P(f;z_1,\dots,z_m;x)+f[z_1,\dots,z_m,x]\omega(x).$$

Aplicăm acum Propoziția 8.13 și obținem (21).

8.3 Convergența procesului de interpolare

Considerăm șirul de funcții definit prin

$$(22)\qquad T_n:[-1,1]\to[-1,1], n\ge 0, T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

Propoziția 8.15 *Sunt adevărate relațiile*

(*i*) $T_0(x)=1, T_1(x)=x,\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), n\ge 1, x\in[-1,1]$.
(*ii*) T_n *este restricția unui polinom de grad n la* $[-1,1]$ *cu coeficientul termenului de grad n,* 2^{n-1}. *Rădăcinile polinomului* T_n *sunt*

$$x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k=\overline{0,n-1}.$$

(*iii*) *Fie* $\overline{T_n}(x)=\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}, x\in[-1,1], n\ge 0$, *polinom unitar. Atunci pentru orice polinom Q de grad n, unitar avem*: $\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|\overline{T_n}(x)\right|\le\max\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$.

(*iv*) *Pentru orice polinom unitar Q, de grad n, avem*: $\max\limits_{x\in[a,b]}|Q(x)|\ge\dfrac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$.

T_n se numește *polinomul Cebâșev* de grad *n*.

Demonstrație. (*i*). Este suficient să folosim relația

$$\cos((n+1)\arccos x)+\cos((n-1)\arccos x)=2\cos(\arccos x)\cos(n\arccos x), n\geq 1.$$

(*ii*). Folosind (*i*), prin recurență, se obține prima parte a propoziției. Avem

$$\cos(n\arccos x)=0 \Leftrightarrow n\arccos x=\frac{(2k+1)\pi}{2}, k\in Z \Leftrightarrow x=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k\in Z.$$

Dintre aceastea numai n valori sunt distincte: $x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k=\overline{0,n-1}$.

(*iii*). Avem $\left|\overline{T}_n(x)\right|=\left|\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right|\leq\frac{1}{2^{n-1}}$. Considerăm $t_k=\cos\frac{k\pi}{n}, k=\overline{1,n-1}$. Avem $\overline{T}_n(t_k)=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}, k=\overline{1,n-1}$. Prin urmare $\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right|=\frac{1}{2^{n-1}}$. Presupunem prin absurd, că există un polinom Q de grad n, unitar astfel încât

$$\frac{1}{2^{n-1}}=\max_{x\in[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right|>\max_{x\in[-1,1]}\left|Q(x)\right|.$$

Prin urmare $-\frac{1}{2^{n-1}}<Q(x)<\frac{1}{2^{n-1}}, x\in[-1,1]$. Polinomul $R=Q-\overline{T}_n$ este un polinom de grad cel mult n -1 şi satisface relațiile

$$R(t_k)=Q(t_k)-\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}, k=\overline{1,n-1}.$$

Observăm că $R(t_j)R(t_{j+1})<0, j=\overline{1,n-2}$, $R(1)R(t_1)<0$, $R(t_{n-1})R(-1)<0$. Prin urmare există n puncte distincte în intervalul (-1, 1) în care R se anulează. Cum gradul polinomului R este cel mult n - 1, rezultă că R este identic nul. Contradicție cu alegerea lui Q. (*iv*). Fie $\varphi:[-1,1]\to[a,b], \varphi(t)=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$ o aplicație bijectivă. Avem

$$\max_{x\in[a,b]}\left|Q(x)\right|=\max_{t\in[-1,1]}\left|Q\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)\right|=\frac{(b-a)^n}{2^n}\max_{t\in[-1,1]}\left|\frac{Q\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)}{\frac{(b-a)^n}{2^n}}\right|\geq\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

Unde în ultima inegalitate am folosit (*iii*) pentru $\frac{2^n}{(b-a)^n}Q$.

Teorema 8.16 (Teorema lui Fejér). *Fie* $f:[a,b]\subset R\to R$, *o funcție continuă.*

Considerăm punctele

$$y_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{a+b}{2}, k = \overline{0,n-1},$$

unde $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = \overline{0,n-1}$, *sunt rădăcinile polinomului Cebâşev de grad n. Construim polinomul de interpolare* P_n, *de grad cel mult 2n - 1, care satisface condiţiile* $P_n(y_k) = f(y_k), P_n'(y_k) = 0, k = \overline{0,n-1}$. *Atunci şirul de polinoame* $(P_n)_n$, *converge uniform, pe [a, b] către f.*

Demonstraţie. Construim funcţiile:

$$g(t) = f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}), t \in [-1,1] \ ; \ Q_n(t) = P_n(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}), t \in R.$$

Polinomul Q_n este polinomul de interpolare al funcţiei g, de grad cel mult $2n$-1, care satisface condiţiile $Q_n(x_k) = g(x_k), Q_n'(x_k) = 0, \ k = \overline{0,n-1}$. Pentru a demonstra teorema este suficient să demonstrăm că şirul $(Q_n)_n$ converge uniform pe [-1, 1] către g. Din Consecinţa 7.5 avem

$$Q_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega(t)}{(t-x_j)^2}\left(g(x_j)\frac{2}{\omega''(x_j)} - \frac{2}{3}(t-x_j)\frac{\omega'''(x_j)}{(\omega''(x_j))^2} \right)$$

unde polinomul ω este

$$\omega(t) = \prod_{j=0}^{n-1}(t-x_j)^2 = (\overline{T}_n(t))^2 = \frac{\cos^2(n \arccos t)}{2^{2n-2}}.$$

Cum

$$\omega''(x_j) = \frac{n^2}{2^{2n-3}(1-x_j^2)}, \omega'''(x_j) = \frac{3n^2 x_j}{2^{2n-3}(1-x_j^2)^2}, j = \overline{0,n-1}.$$

înlocuind, obţinem

$$Q_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega(t)}{(t-x_j)^2} g(x_j) \frac{2^{2n-2}}{n^2}(1 - t x_j).$$

Punând în această relaţie $g(t) = 1, t \in [-1,1]$, obţinem identitatea

$$1=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\omega(t)}{(t-x_j)^2}\frac{2^{2n-2}}{n^2}(1-tx_j).$$

Funcţia $g:[-1,1]\to R$ este uniform continuă pe compactul [-1, 1]. Prin urmare avem pentru orice $\varepsilon,\varepsilon>0$ există $\eta_\varepsilon,\eta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru $t,t'\in[-1,1],|t-t'|<\eta_\varepsilon$ avem $|g(t)-g(t')|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Pentru $t\in[-1,1]$ avem

$$Q_n(t)-g(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\cos^2(n\arccos t)}{(t-x_j)^2}(g(x_j)-g(t))\frac{1}{n^2}(1-tx_j)$$

$$Q(t)-g(t)=\sum_{j\in I_1}\frac{\cos^2(n\arccos t)}{n^2(t-x_j)^2}(g(x_j)-g(t))(1-tx_j)+\sum_{j\in I_2}\frac{\cos^2(n\arccos t)}{n^2(t-x_j)^2}(g(x_j)-g(t))(1-tx_j),$$

unde $I_1=\{j|j=\overline{0,n-1},|t-x_j|<\eta_\varepsilon\}$ şi $I_2=\{j|j=\overline{0,n-1},|t-x_j|\ge\eta_\varepsilon\}$.

Avem

$$|Q_n(t)-g(t)|\le\sum_{j\in I_1}\frac{\cos^2(n\arccos t)}{n^2(t-x_j)^2}|g(x_j)-g(t)|(1-tx_j)+\sum_{j\in I_2}\frac{\cos^2(n\arccos t)}{n^2(t-x_j)^2}|g(x_j)-g(t)|(1-tx_j)$$

$$|Q_n(t)-g(t)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{4M}{\eta_\varepsilon^2 n}$$

unde $M=\max_{t\in[-1,1]}|g(t)|$. Cum $\frac{4M}{\eta_\varepsilon^2 n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, există $N_\varepsilon\in N$ astfel încât pentru $n\ge N_\varepsilon$ avem $\frac{4M}{\eta_\varepsilon^2 n}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Prin urmare pentru orice $\varepsilon,\varepsilon>0$, există $N_\varepsilon\in N$ astfel încât pentru $n\ge N_\varepsilon$ şi pentru $t\in[-1,1]$ avem $|Q_n(t)-g(t)|<\varepsilon$.

8.4 Polinoame de interpolare cu noduri echidistante

Fie $f:[a,b]\to R$, $x_0\in[a,b]$ şi $h>0$. Considerăm reţeaua de puncte echidistante cu pas h: $\{x_j=x_0+jh|j=0,\pm1,\dots,\pm n\}\subset[a,b]$. Fie $m\ge0,m\in N$.

Diferența ascendentă de ordinul m, a funcției f, în punctul x_k al rețelei, $\Delta^m f(x_k)$, *diferența descendentă de ordinul m, a funcției f, în punctul* x_k al rețelei, $\nabla^m f(x_k)$, *diferența centrată de ordinul m, a funcției f, în punctul* x_k al rețelei, $\delta^m f(x_k)$, se definesc recurent prin

(23) $$\Delta^0 f(x_k) = \nabla^0 f(x_k) = \delta^0 f(x_k) = f(x_k)$$

(24) $$\Delta^m f(x_k) = \Delta^{m-1} f(x_{k+1}) - \Delta^{m-1} f(x_k)$$

(25) $$\nabla^m f(x_k) = \nabla^{m-1} f(x_k) - \nabla^{m-1} f(x_{k-1})$$

(26) $$\delta^m f(x_k) = \delta^{m-1} f(x_k + \frac{h}{2}) - \delta^{m-1} f(x_k - \frac{h}{2}).$$

Propoziția 8.17 *Sunt adevărate relațiile:*

(27) $$\Delta^m f(x_k) = m! h^m f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}]$$

(28) $$\nabla^m f(x_k) = m! h^m f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}]$$

(29) $$\delta^m f(x_k + \frac{m}{2} h) = m! h^m f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}].$$

Demonstrație. Se demonstrează prin inducție după m. Pentru $m = 0$

$$\Delta^0 f(x_k) = \nabla^0 f(x_k) = f(x_k); \delta^0 f(x_k) = f(x_k).$$

Presupunem adevărate relațiile pentru $s < m$ și demonstrăm pentru $s+1$

$$\Delta^{s+1} f(x_k) = \Delta^s f(x_{k+1}) - \Delta^s f(x_k) = h^s s! \{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+s+1}] - f[x_k, \dots, x_{k+s}]\} =$$
$$h^s s! \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+s+1}] - f[x_k, \dots, x_{k+s}]}{x_{k+s+1} - x_k}(x_{k+s+1} - x_k) = h^{s+1}(s+1)! f[x_k, \dots, x_{k+s+1}]$$

$$\nabla^{s+1} f(x_k) = \nabla^s f(x_k) - \nabla^s f(x_{k-1}) = h^s s! \{f[x_k, \dots, x_{k-s}] - f[x_{k-1}, \dots, x_{k-s-1}]\} =$$
$$h^s s! \frac{f[x_k, \dots, x_{k-s1}] - f[x_{k-1}, \dots, x_{k-s-1}]}{x_k - x_{k-s-1}}(x_k - x_{k-s-1}) = h^{s+1}(s+1)! f[x_k, \dots, x_{k-s-1}]$$

$$\delta^{s+1} f(x_k + \frac{s+1}{2} h) = \delta^s f(x_k + (s+2)\frac{h}{2}) - \delta^s f(x_k + \frac{s}{2}) = h^s s! \{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+s+1}] - f[x_k, \dots, x_{k+s}]\} =$$
$$= h^s s! \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+s+1}] - f[x_k, \dots, x_{k+s}]}{x_{k+s+1} - x_k}(x_{k+s+1} - x_k) = h^{s+1}(s+1)! f[x_k, \dots, x_{k+s+1}]$$

Propoziția 8.18 *Este adevărată relația:*

(30) $$\Delta^m f(x_k) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j (-1)^{m-j} f(x_{k+j}) \,.$$

Demonstrație. Se demonstrează prin inducție după m. Pentru $m = 0$ propoziția este o identitate. Presupunem adevărate relațiile pentru $s < m$ și demonstrăm pentru $s+1$

$$\Delta^{s+1} f(x_k) = \Delta^s f(x_{k+1}) - \Delta^s f(x_k) = \sum_{j=0}^{s} C_s^j (-1)^{s-j} f(x_{k+1+j}) - \sum_{j=0}^{s} C_s^j (-1)^{s-j} f(x_{k+j}) =$$

$$\sum_{j=1}^{s} (C_s^{j-1} + C_s^j)(-1)^{s-j+1} f(x_{k+j}) + f(x_{k+s+1}) + (-1)^{s+1} f(x_k) = \sum_{j=0}^{s+1} C_{s+1}^j (-1)^{s+1-j} f(x_{k+j})$$

Propoziția 8.19 *Polinomul de interpolare P al funcției* $f:[a,b] \to R$ *cu nodurile* $\{x_j = x_0 + jh, j = \overline{0,n}\} \subset [a,b]$, *se reprezintă prin formula Newton ascendentă*:

(31) $$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} t(t-1)\ldots(t-k+1)$$

cu diferențe ascendente și

(32) $$P(x) = \delta^0 f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^k f(x_0 + k\frac{h}{2})}{k!} t(t-1)\ldots(t-k+1)$$

cu diferențe centrate, unde $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Demonstrație. Folosim formula Newton pentru scrierea polinomului P

$$P(x) = P(f; x_0, \ldots, x_n; x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Folosind Propoziția 8.17 rezultă

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{1}{k!h^k}\delta^k f(x_0+k\frac{h}{2}).$$

Avem

$$P(f;x_0,\dots,x_n;x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)\prod_{j=0}^{k-1}(x_0+th-x_j)$$

$$P(f;x_0,\dots,x_n;x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)\prod_{j=0}^{k-1}h(t-j)$$

şi respectiv

$$P(f;x_0,\dots,x_n;x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!h^k}\delta^k f(x_0+k\frac{h}{2})\prod_{j=0}^{k-1}h(t-j).$$

De unde se obţine formula (31) şi respectiv (32).

Propoziţia 8.20 *Polinomul de interpolare P al funcţiei* $f:[a,b]\to R$, *cu nodurile* $\{x_j=x_0+jh, j=\overline{-n,0}\}\subset[a,b]$, *se reprezintă prin formula Newton descendentă:*

(33) $$P(x)=\nabla^0 f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\nabla^k f(x_0)}{k!}t(t+1)\dots(t+k-1)$$

cu diferenţe descendente şi

(34) $$P(x)=\delta^0 f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta^k f(x_0-k\frac{h}{2})}{k!}t(t+1)\dots(t+k-1)$$

cu diferenţe centrate, unde $t=\dfrac{x-x_0}{h}$.

Demonstraţie. Folosim formula Newton pentru scrierea polinomului P

$$P(x)=P(f;x_0,x_{-1},\dots,x_{-n};x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,x_{-1},\dots,x_{-k}]\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_{-j}).$$

Folosind Propoziţia 8.17 rezultă

$$f[x_0,x_{-1},\dots,x_{-k}]=\frac{1}{k!h^k}\nabla^k f(x_0)$$

$$f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-k}] = \frac{1}{k!h^k}\delta^k f(x_0 - k\frac{h}{2}).$$

Avem

$$P(f; x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}; x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!h^k} \nabla^k f(x_0) \prod_{j=0}^{k-1} (x_0 + th - x_{-j})$$

$$P(f; x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}; x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!h^k} \nabla^k f(x_0) \prod_{j=0}^{k-1} h(t + j)$$

şi respectiv

$$P(f; x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}; x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!h^k} \delta^k f(x_0 - k\frac{h}{2}) \prod_{j=0}^{k-1} h(t - j).$$

De unde se obţine formula (33) şi respectiv (34).

Propoziţia 8. 21 *Polinomul de interpolare P al funcţiei* $f:[a,b] \to R$, *cu nodurile* $\{x_j = x_0 + jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\} \subset [a,b]$, *se reprezintă prin formula Gauss ascendentă*:

(35)

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!} t + \frac{\Delta^2 f(x_{-1})}{2!} t(t-1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^{2s-1} f(x_{-s+1})}{(2s-1)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (s-1)^2) + \frac{\Delta^{2s} f(x_{-s})}{(2s)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (s-1)^2)(t - s) +$$

$$\ldots + \frac{\Delta^{2n-1} f(x_{-n+1})}{(2n-1)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (n-1)^2) + \frac{\Delta^{2n} f(x_{-n})}{(2n)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (n-1)^2)(t - n).$$

cu diferenţe ascendente şi

(36)

$$P(x) = \delta^0 f(x_0) + \frac{\delta^1 f(x_0 + \frac{h}{2})}{1!} t + \frac{\delta^2 f(x_0)}{2!} t(t-1) + \ldots$$

$$+ \frac{\delta^{2s-1} f(x_0 + \frac{h}{2})}{(2s-1)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (s-1)^2) + \frac{\delta^{2s} f(x_0)}{(2s)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (s-1)^2)(t - s) +$$

$$\ldots + \frac{\delta^{2n-1} f(x_0 + \frac{h}{2})}{(2n-1)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (n-1)^2) + \frac{\delta^{2n} f(x_0)}{(2n)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (n-1)^2)(t - n).$$

cu diferențe centrate, unde $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Demonstrație. Folosim formula Newton pentru scrierea polinomului P

$$
\begin{aligned}
P(x) &= P(f; x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n}; x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\
&+ f[x_0, x_1, x_{-1}](x - x_0)(x - x_1) + \ldots f[x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_{-k+1}, x_k](x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\ldots(x - x_{-k+1}) + \\
&+ f[x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_k, x_{-k}](x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\ldots(x - x_{-k+1})(x - x_k) + \ldots \\
&+ f[x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_{-n+1}, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\ldots(x - x_{-n+1}) + \\
&+ f[x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n}](x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\ldots(x - x_{-n+1})(x - x_n).
\end{aligned}
$$

Din Propoziția 8.17 avem

$$f[x_0, x_1, x_{-1}\ldots, x_k, x_{-k}] = \frac{1}{(2k)!h^{2k}} \Delta^{2k} f(x_{-k})$$

$$f[x_0, x_1, x_{-1}\ldots, x_k, x_{-k}, x_{k+1}] = \frac{1}{(2k+1)!h^{2k+1}} \Delta^{2k+1} f(x_{-k})$$

$$f[x_0, x_1, x_{-1}\ldots, x_k, x_{-k}] = \frac{1}{(2k)!h^{2k}} \delta^{2k} f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_{-1}\ldots, x_k, x_{-k}, x_{k+1}] = \frac{1}{(2k+1)!h^{2k+1}} \delta^{2k+1} f(x_0 + \frac{h}{2}).$$

Prin înlocuire în polinomul de mai sus se obțin formulele (35) și respectiv (36).

Propoziția 8.22 *Polinomul de interpolare P al funcției $f:[a,b] \to R$ cu nodurile $\{x_j = x_0 + jh, j = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots, \mp n\} \subset [a,b]$, se reprezintă prin formula Gauss descendentă:*

(37)

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \Delta f(x_0) + \frac{\Delta^1 f(x_{-1})}{1!} t + \frac{\Delta^2 f(x_{-1})}{2!} t(t+1) + \ldots \\
&+ \frac{\Delta^{2s-1} f(x_{-s})}{(2s-1)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (s-1)^2) + \frac{\Delta^{2s} f(x_{-s})}{(2s)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (s-1)^2)(t+s) + \\
&\ldots + \frac{\Delta^{2n-1} f(x_{-n})}{(2n-1)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (n-1)^2) + \frac{\Delta^{2n} f(x_{-n})}{(2n)!} t(t^2 - 1)\ldots(t^2 - (n-1)^2)(t+n).
\end{aligned}
$$

cu diferențe ascendente și

(38)

$$P(x)=\delta^0 f(x_0)+\frac{\delta^1 f(x_0-\frac{h}{2})}{1!}t+\frac{\delta^2 f(x_0)}{2!}t(t+1)+\ldots$$

$$+\frac{\delta^{2s-1} f(x_0-\frac{h}{2})}{(2s-1)!}t(t^2-1)\ldots(t^2-(s-1)^2)+\frac{\delta^{2s} f(x_0)}{(2s)!}t(t^2-1)\ldots(t^2-(s-1)^2)(t+s)+$$

$$\ldots+\frac{\delta^{2n-1} f(x_0-\frac{h}{2})}{(2n-1)!}t(t^2-1)\ldots(t^2-(n-1)^2)+\frac{\delta^{2n} f(x_0)}{(2n)!}t(t^2-1)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t+n).$$

cu diferențe centrate, unde $t=\dfrac{x-x_0}{h}$.

Semisuma polinoamelor (37) *și* (38) *reprezintă forma Stirling a polinomului de interpolare P.*

Demonstrație. Folosim formula Newton pentru scrierea polinomului P

$$P(x)=P(f;x_0,x_{-1},x_1,\ldots,x_{-n},x_n;x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+$$
$$+f[x_0,x_{-1},x_1](x-x_0)(x-x_{-1})+\ldots f[x_0,x_{-1},x_1,\ldots,x_{k-1},x_{-k}](x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\ldots(x-x_{k-1})+$$
$$+f[x_0,x_{-1},x_1,\ldots,x_{-k},x_k](x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{-k})+\ldots$$
$$+f[x_0,x_{-1},x_1,\ldots,x_{n-1},x_{-n}](x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})+$$
$$+f[x_0,x_{-1},x_1,\ldots,x_{-n},x_n](x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_{-n}).$$

Din Propoziția 8.17 avem

$$f[x_0,x_{-1},x_1\ldots,x_{-k},x_k]=\frac{1}{(2k)!h^{2k}}\Delta^{2k}f(x_{-k})$$

$$f[x_0,x_{-1},x_1\ldots,x_{-k},x_k,x_{-k-1}]=\frac{1}{(2k+1)!h^{2k+1}}\Delta^{2k+1}f(x_{-k-1})$$

$$f[x_0,x_{-1},x_1\ldots,x_{-k},x_k]=\frac{1}{(2k)!h^{2k}}\delta^{2k}f(x_0)$$

$$f[x_0,x_{-1},x_1\ldots,x_{-k},x_k,x_{-k-1}]=\frac{1}{(2k+1)!h^{2k+1}}\delta^{2k+1}f(x_0-\frac{h}{2}).$$

Prin înlocuire în polinomul de mai sus se obțin formulele (37) și respectiv (38).

8.5 Derivare numerică

Teorema 8.23 *Fie* $f:(a,b)\to R, f\in C^{n+1}(a,b)$. *Considerăm punctele* $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset(a,b)$ *astfel încât* $x_0<x_1<\dots<x_n$. *Fie P polinomul de interpolare* $P(x)=P(f;x_0,\dots,x_n;x)$. *Atunci pentru orice* $k, 0\le k\le n$ *şi pentru orice* $x\in(a,b)$ *există* $u_{k,x}\in(a,b)$ *astfel încât*

$$f^{(k)}(x)=P^{(k)}(x)+\frac{f^{(n+1)}(u_{k,x})}{(n+1-k)!}\prod_{j=0}^{n-k}(x-x_j^k) \tag{39}$$

unde $x_j^k\in(x_j,x_{j+k}), j=\overline{0,n-k}$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia $R:(a,b)\to R, R(x)=f(x)-P(x)$.
Arătăm prin recurenţă că $R^{(j)}, 0\le j\le k$ are cel puţin n - j+1 rădăcini. Avem $R(x_i)=0, i=\overline{0,n}$. Prin urmare derivata R' are cel putin n rădăcini $x_i^1\in(x_i,x_{i+1}), i=\overline{0,n-1}$. Presupunem acum că $R^{(p)}, p<k$ are $n-p+1$ rădăcini $x_i^p\in(x_i,x_{i+p}), i=\overline{0,n-p}$. Atunci $R^{(p+1)}$ admite cel puţin o rădăcină $x_i^{p+1}\in(x_i^p,x_{i+1}^p)\subset(x_i,x_{i+p+1}), i=\overline{0,n-p}$.

Considerăm acum funcţia

$$F:(a,b)\to R, F(t)=R^{(k)}(t)-\alpha\prod_{i=0}^{n-k}(t-x_i^k)$$

unde α este ales astfel încât pentru un x fixat în $[a,b]$ avem $R(x)=0$. Prin urmare F se anulează în $n-k+2$ puncte distincte din interval. Atunci există $u_{k,x}\in[a,b]$, astfel încât

$$F^{(n-k+1)}(u_{k,x})=0\Leftrightarrow R^{(n+1)}(u_{k,x})-\alpha(n-k+1)!=0.$$

Prin urmare $\alpha=\dfrac{f^{(n+1)}(u_{k,x})}{(n-k+1)!}$.

Teorema 8.24 *Fie* $f:(a,b)\to R, \{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset(a,b)$.
Dacă $f\in C^{n+k+1}(a,b)$ *atunci pentru orice i,* $0\le i\le k$ *avem*

$$\frac{d^i}{dx^i}f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]=i!\,f[x_0,x_1,\dots,x_n,\underbrace{x,\dots,x}_{i+1-\text{ori}}]. \tag{40}$$

Demonstrație. Această relație se demonstrează prin inducție după i. Pentru $i=0$ derivă din continuitatea diferențelor divizate. Presupunem propoziția adevărată pentru i și demonstrăm pentru $i+1$. Avem

$$\lim_{z\to x}\frac{\frac{d^i}{dx^i}f[x_0,x_1,\dots,x_n,z]-\frac{d^i}{dx^i}f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]}{z-x}=$$

$$=\lim_{z\to x} i!\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_n,\overbrace{z,\dots,z}^{i+1-ori}]-f[x_0,x_1,\dots,x_n,\overbrace{x,\dots,x}^{i+1-ori}]}{z-x}=$$

$$=i!\lim_{z\to x}\frac{\sum\limits_{j=0}^{i}f[x_0,x_1,\dots,x_n,\overbrace{z,\dots,z}^{i+1-j-ori},\overbrace{x,\dots,x}^{j-ori}]-f[x_0,x_1,\dots,\overbrace{z,\dots z}^{i-j-ori},\overbrace{x,\dots,x}^{j-ori}]}{z-x}=$$

$$=i!\lim_{z\to x}\sum_{j=0}^{i}f[x_0,x_1,\dots,x_n,\overbrace{z,\dots z}^{i-j+1-ori},\overbrace{x,\dots,x}^{j+1-ori}]=i!\sum_{j=0}^{i}f[x_0,x_1,\dots,x_n,\overbrace{x,\dots,x}^{i+2-ori}]=$$

$$=(i+1)!\,f[x_0,x_1,\dots,x_n,\overbrace{x,\dots,x}^{i+2-ori}].$$

Consecință 8.25 *Fie* $f:(a,b)\to R,\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset(a,b)$.

Dacă $f\in C^{n+k+1}(a,b)$, *atunci pentru orice* $x\in(a,b)$ *avem*

(41) $$f^{(k)}(x)=P^{(k)}(f;x_0,x_1,\dots,x_n;x)+\sum_{j=0}^{k}j!C_k^j\omega^{(k-j)}(x)f[x_0,x_1,\dots,x_n,\overbrace{x,\dots,x}^{j+1-ori}]$$

(50) $$f^{(k)}(x)=P^{(k)}(f;x_0,x_1,\dots,x_n;x)+\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(n+j+1)!(k-j)!}\omega^{(k-j)}(x)f^{(n+j+1)}(u_{j,x})$$

unde $u_{j,x}\in[\min\{x_0,x_1,\dots,x_n,x\},\max\{x_0,x_1,\dots,x_n,x\}]$, $j\in\{0,\dots,k\}$ *și*

$\omega(x)=\prod\limits_{j=0}^{n}(x-x_j)$.

Demonstrație. Vom derivăm de k ori identitatea (17) din Teorema 8.10 și vom ține seama de Teorema 8.24.

Capitolul 9

Integrare numerică

9.1 Aproximarea integralelor definite

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Uneori este posibil, folosind o primitivă a lui f să calculăm

(1) $$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

De cele mai multe ori cunoaștem numai un număr finit de valori ale funcției pe intervalul $[a,b]$. Ne propunem să aproximăm (1) în această situație.

Considerăm spațiul $C[a,b]$, spațiu Banach în raport cu norma

(2) $$\|f\|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

În spațiul dual al lui $C[a,b]$, $(C[a,b])^*$, norma este definită prin

(3) $$\|F\|=\sup_{\|f\|=1}|F(f)|=\sup_{\|f\|\le 1}|F(f)|=\sup_{f\neq 0}\frac{|F(f)|}{\|f\|}.$$

Pentru fiecare $n\in N, n\ge 1$, considerăm k_n puncte, $\{x_1^n,\dots,x_{k_n}^n\}\subset[a,b]$ și k_n valori reale $\{\alpha_1^n,\dots,\alpha_{k_n}^n\}\subset R$. Definim

(4) $$Q_n \in (C[a,b])', Q_n(f) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n f(x_i^n).$$

$Q_n(f)$ se numeşte *formulă de cuadratură* pentru calculul integralei (1).

Propoziţia 9.1 *Sunt adevărate relaţiile*:
(i) $\|I\| = b - a$

(ii) $\|Q_n\| = \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n|$.

(iii) $\|I - Q_n\| = b - a + \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n|$.

Demonstraţie. (i) Avem $|I(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le (b-a)\|f\|$. Prin urmare este adevărată relaţia $\|I\| \le b - a$. Dar $I(1) = b - a \le \|I\|\|1\|$, de unde $\|I\| \ge b - a$.
(ii) Calculăm

$$|Q_n(f)| = \left|\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n f(x_i^n)\right| \le \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n| |f(x_i^n)| \le \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n| \|f\|.$$

Deci avem $\|Q_n\| \le \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n|$. Considerăm acum o funcţie $f_0 : [a,b] \to R$ astfel încât $f_0(x_i^n) = \operatorname{sgn}(\alpha_i^n), i = \overline{1,k_n}$, pe intervalele $[x_i^n, x_{i+1}^n], i = \overline{1,k_n - 1}$, f_0 este linia poligonală care uneşte punctele $(x_i^n, f_0(x_i^n))$, $(x_{i+1}^n, f_0(x_{i+1}^n))$, iar pe intervalele $[a, x_1^n]$, respectiv $[x_{k_n}^n, b]$, dacă sunt nevide, funcţia f_0 este o constantă egală cu $\operatorname{sgn}(\alpha_1^n)$, respectiv $\operatorname{sgn}(\alpha_{k_n}^n)$. Avem $f_0 \in C[a,b], \|f_0\| = 1$ şi $Q_n(f_0) = \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n| \le \|Q_n\|\|f_0\| = \|Q_n\|$. Prin urmare $\|Q_n\| \ge \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n|$. ($iii$) Avem $\|I - Q_n\| \le \|I\| + \|Q_n\| \le b - a + \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_i^n|$. Alegem acum $\varepsilon > 0$, astfel încât $2\varepsilon < \min_{2 \le i \le k_n} (x_i^n - x_{i-1}^n)$ şi $\varepsilon < x_1^n - a, \varepsilon < b - x_{k_n}^n$ dacă $x_1^n - a \ne 0$, respectiv $b - x_{k_n}^n \ne 0$. Construim o funcţie f_0, continuă, poligonală pe $[a,b]$ astfel încât

$f_0(x_i^n) = -\operatorname{sgn}(\alpha_i^n), f_0(x_i^n \pm \varepsilon) = 1, i = \overline{1,k_n}$,
$f_0(t) = 1, t \in [x_i^n + \varepsilon, x_{i+1}^n - \varepsilon], i = \overline{1,k_n - 1}$,

$f_0(t)=1, t\in[a,x_1^n-\varepsilon]$, dacă $x_1^n-a\neq 0$,
$f_0(t)=1, t\in[x_{k_n}^n+\varepsilon,b]$, dacă $b-x_{k_n}^n\neq 0$.

Din construcție $\|f_0\|=1$.

Avem $Q_n(f_0)=-\sum_{i=1}^{k_n}|\alpha_i^n|$ şi $I(f_0)=b-a-\sum_{i=1}^{k_n}\int_{x_i^n-\varepsilon}^{x_i^n+\varepsilon}f(x)dx\geq b-a-2\varepsilon k_n$. Prin urmare $I(f_0)-Q_n(f_0)\geq b-a+\sum_{i=1}^{k_n}|\alpha_i^n|-2\varepsilon k_n$. Pe de altă parte avem $I(f_0)-Q_n(f_0)\leq\|I-Q_n\|\|f_0\|=\|I-Q_n\|$. Am obținut astfel inegalitatea

$$\|I-Q_n\|\geq b-a+\sum_{i=1}^{k_n}|\alpha_i^n|-2\varepsilon k_n$$

de unde

$$\|I-Q_n\|\geq b-a+\sum_{i=1}^{k_n}|\alpha_i^n|.$$

Teorema 9. 2 *Şirul* $(Q_n)_{n\geq 1}\subset(C[a,b])^*$ *converge punctual către* I *dacă şi numai dacă sunt îndeplinite relațiile*:
(i) *există* $M>0$ *astfel încât pentru orice* $n\geq 1, \|Q_n\|\leq M$.
(ii) *există un subspațiu liniar* $G\subset C[a,b]$ *astfel încât* $\overline{G}=C[a,b]$ *şi pentru orice* $f\in G, Q_n(f)\to I(f)$.

Demonstrație. Presupunem că pentru orice $f\in C[a,b]$ este adevărată relația $Q_n(f)\to I(f)$.
Pentru f fixat, există un rang $N_1\in N$ astfel încât pentru

$$n\geq N_1, |Q_n(f)-I(f)|\leq 1\Rightarrow|Q_n(f)|\leq|I(f)|+1.$$

Considerăm $M_f=\max(|I(f)|+1,|Q_1(f)|,\dots,|Q_{N_1-1}(f)|$. Avem pentru orice $n\geq 1, |Q_n(f)|\leq M_f$. Din principiul mărginirii uniforme (Teorema 3.10) avem (i). Relația (ii) este evident îndeplinită.

Presupunem acum că sunt îndeplinite relațiile (i) şi (ii). Fie $f\in C[a,b]$. Pentru $\varepsilon>0$ există $f_0\in G$ astfel încât $\|f-f_0\|<\dfrac{\varepsilon}{2(M+\|I\|)}$. Avem

$Q_n(f_0) \to I(f_0)$. Există astfel $N_\varepsilon \in N$ cu proprietatea pentru orice număr natural n, $n \geq N_{\varepsilon,} |Q_n(f_0) - I(f_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pentru $n \geq N_{\varepsilon,}$ avem

$$|Q_n(f) - I(f)| \leq |Q_n(f) - Q_n(f_0)| + |Q_n(f_0) - I(f_0)| + |I(f) - I(f_0)| \leq$$
$$(\|Q_n\| + \|I\|)\|f - f_0\| + |Q_n(f_0) - I(f_0)| \leq (M + \|I\|)\|f - f_0\| + |Q_n(f_0) - I(f_0)| < \varepsilon$$

Consecința 9.3 *Șirul* $(Q_n)_{n\geq 1} \subset (C[a,b])'$ *converge slab către I dacă și numai dacă sunt îndeplinite relațiile:*
(i) *Există* $M > 0$ *astfel încât pentru orice* $n \geq 1, \|Q_n\| \leq M$.
(ii) *Pentru orice* $f \in G, Q_n(f) \to I(f)$, *unde* $G = Sp\{1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$, *spațiul polinoamelor cu coeficienți în R.*

Demonstrație. Este suficient să folosim teorema lui Weierstrasse. Orice funcție continuă pe $[a,b]$ este limita uniformă a unui șir de polinoame.

Consecința 9.4 *Șirul* $(Q_n)_{n\geq 1} \subset (C[a,b])'$ *nu converge în sensul normei în* $(C[a,b])'$ *către I.*

Demonstrație. Este suficient să observăm că $\|I - Q_n\| \geq b - a$.

9.2 Formule de cuadratură obținute prin integrarea polinoamelor de interpolare

Fie $f:[a,b] \to R$, o funcție integrabilă. Fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in R$, distincte două câte două, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in N \setminus \{0\}$ și $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Presupunem că există $f^{(j)}(x_i)$, pentru $i = \overline{1,n}, j = \overline{0, \alpha_i - 1}$. O formulă de cuadratură obținută prin integrarea polinoamului de interpolare al funcției f atașat datelor de mai sus, se construiește astfel

$$Q_m(f) = \int_a^b P(f; \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1 - ori}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n - ori}; x)dx.$$

Restul la aproximarea integralei este

$$R_m(f) = I(f) - Q_m(f) = \int_a^b f[\underbrace{x_1,\ldots x_1}_{\alpha_1\text{-ori}},\ldots,\underbrace{x_n,\ldots x_n}_{\alpha_n\text{-ori}},x]\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{\alpha_i}dx .$$

9.2.1 Formulele Newton-Côtes

Fie $f:[a,b]\to R$, o funcție integrabilă, $n\in N, n\geq 1$ și $h=\dfrac{b-a}{n}$. Considerăm rețeaua de puncte: $x_j = a + jh, j=\overline{0,n}$. Formula de cuadratură Newton-Cotes corespunzătoare rețelei de puncte considerate este

(5) $$Q_n^{N-C}(f) = \int_a^b P(f;x_0,x_1,\ldots,x_n;x)dx$$

iar restul la formula de cuadratură este

(6) $$R_n^{N-C}(f) = I(f) - Q_n^{N-C}(f).$$

Propoziția 9.5 *Sunt adevărate relațiile*:

$(i)\, Q_n^{N-C}(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i^n f(x_i)$, *unde pentru* $i=\overline{0,n}$ *avem*

(7) $$H_i^n = \frac{(-1)^{n-i}}{n}\cdot\frac{1}{i!(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)dt .$$

(ii) *Dacă* $f\in C^{n+1}[a,b]$ *atunci*

(8) $$\left|I(f) - Q_n^{N-C}(f)\right| \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|}{(n+1)!}h^{n+2}\int_0^n \left|t(t-1)\ldots(t-n)\right|dt .$$

(iii) $I(P) = Q_n^{N-C}(P)$ *pentru orice P polinom de grad cel mult n.*

Demonstrație. (i) Avem, conform formulei lui Lagrange

$$P(f;x_0,\dots,x_n;x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Calculăm integrala polinomului

$$Q_n^{N-C}(f)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(-1)^{n-i}i!(n-i)!h^n}dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $x=x_0+th$ avem formula (7).
(*ii*) Conform Propoziției 8.14, pentru orice $x\in[a,b]$, există $\xi_x\in[a,b]$ astfel încât

$$f(x)=P(f;x_0,\dots,x_n;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n).$$

Prin urmare

$$\left|I(f)-Q_n^{N-C}(f)\right|=\left|\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)dx\right|\le\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|}{(n+1)!}\int_a^b|x-x_0|\dots|x-x_n|dx$$

Cu schimbarea de variabilă $x=x_0+th$ avem formula (8).
(*iii*) Este suficient să observăm că este adevărată relația

$$P(x)=P(P;x_0,\dots,x_n;x)$$

pentru orice polinom de grad cel mult n.

Propoziția 9.6 *Sunt adevărate relațiile*:

(*i*) $H_i^n=H_{n-i}^n, i=\overline{0,n}$;

(*ii*) $\sum_{i=0}^{n} H_i^n=1$;

(*iii*) *Pentru n par avem*:

$$Q_n^{N-C}(f)=\int_a^b P(f;x_0,x_1,\dots,x_n,x_{\frac{n}{2}};x)dx.$$

Demonstrație. (*i*) Avem

$$H_{n-i}^{n} = \frac{(-1)^{i}}{ni!(n-i)!}\int_{0}^{n} t(t-1)\ldots(t-n+i+1)(t-n+i-1)\ldots(t-n)dt.$$

Prin schimbarea de variabilă $t = n - s$ avem

$$H_{n-i}^{n} = \frac{(-1)^{i}}{i!(n-i)!n}\int_{n}^{0}(-1)^{n+1}s(s-1)\ldots(s-i+1)(s-i-1)\ldots(s-n)dt = H_{i}^{n}.$$

(ii). Aplicăm Propoziţia 9.5. (iii) pentru polinomul constant $P(x) = 1$.
(iii). Conform Teoremei 8.10, pentru $x \in [a,b]$ avem

$$P(f;x_0,\ldots,x_n,x_{\frac{n}{2}};x) = P(f;x_0,\ldots,x_n;x) + f[x_0,\ldots,x_n,x_{\frac{n}{2}}](x-x_{\frac{n}{2}})\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Este suficient să demonstrăm că pentru n par $\int_a^b\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx = 0$. Cu schimbarea de variabilă $x = x_0 + th$ în integrală este suficient să demonstrăm $I = \int_0^n\prod_{i=0}^{n}(t-i)dt = 0$. Schimbarea de variabilă în integrală, $t = n - s$ conduce la relaţia

$$\int_0^n\prod_{i=0}^{n}(t-i)dt = (-1)^{n+1}\int_0^n\prod_{i=0}^{n}(s-i)ds.$$

Cum n este par rezultă $I = 0$.

Propoziţia 9.7 *Şirul* $(Q_n^{N-C})_n \subset (C[a,b])'$ *nu converg punctual către I.*

Demonstraţie. Din Propoziţia 8.1 avem $\left\|Q_n^{N-C}\right\| = \sum_{i=0}^{n}\left|H_i^n\right|$. Pentru a demonstra propoziţia este suficient să demonstrăm că nu este îndeplinită condiţia (i) din Teorema 9.2. Arătăm că $\left|H_2^n\right| \to +\infty$. Pentru $n \ge 2$ avem

$$H_2^n = \frac{(-1)^{n-2}}{2n(n-2)!}\int_0^n t(t-1)(t-3)\ldots(t-n)dt.$$

Cu notaţia $\alpha_k^n = \frac{(-1)^n}{2n(n-2)!}\int_k^{k+1} t(t-1)(t-3)\ldots(t-n)dt, k = \overline{0,n-1}$ avem:

$$|\alpha_0^n| = \frac{1}{2n(n-2)!}\int_0^1 t(1-t)(3-t)\dots(n-t)dt \geq \frac{1}{2n(n-2)!}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} t(1-t)(3-t)\dots(n-t)dt$$

Şirul $y_n = \frac{1}{2n(n-2)!}\frac{1}{8}(1-\frac{3}{4})\dots(n-\frac{3}{4}), n \geq 2$ este un şir crescător care satisface relaţia $y_{n+1} = y_n + y_n\frac{4+n}{4(n^2-1)} \geq y_n + y_2\frac{1}{4n}$. Din ultima relaţie avem $y_{n+1} \geq y_3 + y_2(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{3})$, din care rezultă $y_n \to +\infty$. Am demonstrat astfel $|\alpha_0^n| \to +\infty$. Arătăm acum că $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^n|$ este majorată. Avem

$$|\alpha_1^n| \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\int_1^2 t(t-1)(3-t)\dots(n-t)dt \leq \frac{1}{2n(n-2)!}2(2-1)(3-1)\dots(n-1) = \frac{n-1}{n}$$

$$|\alpha_2^n| \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\int_2^3 t(t-1)(3-t)\dots(n-t)dt \leq \frac{1}{2n(n-2)!}6(3-2)\dots(n-2) = \frac{3}{n}$$

$$|\alpha_{n-2}^n| \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\int_{n-2}^{n-1} t(t-1)(3-t)\dots(n-t)dt \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\frac{2(n-1)!}{n-3} = \frac{n-1}{n(n-3)} \leq \frac{3}{n}$$

$$|\alpha_{n-1}^n| \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\int_{n-1}^{n} t(t-1)(3-t)\dots(n-t)dt \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\frac{n!}{n-2} = \frac{n-1}{2(n-2)}$$

Pentru $i = \overline{3,n-3}$ avem:

$$|\alpha_i^n| \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\int_i^{i+1} t(t-1)(t-3)\dots(t-i)(i+1-t)\dots(n-t)dt$$

$$|\alpha_i^n| \leq \frac{1}{2n(n-2)!}\frac{i+1}{i-1}i!(n-i)! \leq \frac{(n-2)(n-1)}{4C_n^i} \leq \frac{(n-2)(n-1)}{4C_n^3} \leq \frac{3}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^n| \leq \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{2(n-2)} + (n-3)\frac{3}{n} \leq \frac{9}{2}.$$

Prin urmare $|H_2^n| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^n\right| \geq \left||\alpha_0^n| - \sum_{i=1}^{n-1}|\alpha_i^n|\right| \to +\infty$.

n/H_i^n							
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

Tabloul coeficienţiilor Newton-Côtes.

9.2.2 Formulele Newton-Côtes sumate

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie integrabilă Riemann, $k\in N, k\geq 1, \delta=\frac{b-a}{k}$.

Considerăm nodurile echidistante cu pas δ , $y_j=a+j\delta, j=\overline{0,k}$.

Avem $I(f)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}}f(x)dx$. Pentru $n\in N, n\geq 1, h=\frac{\delta}{n}$ folosim formulele Newton-Côtes pentru calculul integralelor următoare

$$\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}}f(x)dx=\delta\sum_{j=0}^{n}H_j^n f(y_i+jh)+R_i^n(f)$$

$$R_i^n(f)=\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}}f[y_i,\dots,y_i+nh,x]\prod_{k=0}^{n}(x-y_i-kh)dx$$

Formula sumată Newton-Côtes este

$$Q_{k,s}^{N-C}(f)=\sum_{i=0}^{k-1}\delta\sum_{j=0}^{n}H_j^n f(y_j+jh).$$

Iar restul la formula sumată Newton-Côtes este

$$R_{k,s}^{N-C}(f)=\sum_{i=0}^{k-1}R_i^n(f).$$

Dacă $f\in C^{n+1}[a,b]$ atunci

$$\left|R_{k,s}^{N-C}(f)\right|\le\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{nk}\right)^{n+2}k\int_0^n\left|t(t-1)\ldots(t-n)\right|dt\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

Propoziţia 9.8 *Şirul* $(Q_{k,s}^{N-C})_k\in(C[a,b])'$ *converge slab către I.*

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 9.1 avem

$$\left\|Q_{k,s}^{N-C}\right\|=\frac{b-a}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n}\left|H_j^n\right|=(b-a)\sum_{j=0}^{n}\left|H_j^n\right|$$

care demonstrează că şirul $(\left\|Q_{k,s}^{N-C}\right\|)_k$ este mărginit. Pentru orice $p\ge 0$ avem

$$\left|R_{k,s}^{N-C}(x^p)\right|=\left|Q_{k,s}^{N-C}(x^p)-I(x^p)\right|\le\frac{\left\|(x^p)^{(n+1)}\right\|}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{nk}\right)^{n+2}k\int_0^n\left|t(t-1)\ldots(t-n)\right|dt\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

Conform Consecinţei 9.3. $Q_{k,s}^{N-C}(f)\xrightarrow[k\to\infty]{}I(f),f\in C[a,b]$.

9.2.3 Formula trapezelor

Formula trapezelor este formula Newton-Côtes pentru $n=1$. Avem în acest caz $h=b-a,x_0=a,x_1=b,H_0^1=H_1^1=\frac{1}{2}$. Astfel avem

$$Q^T(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \tag{9}$$

$$R^T(f)=I(f)-Q^T(f)=\int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx \tag{10}$$

Dacă $f \in C^2[a,b]$, folosind Teorema de medie pentru integrala din (10), avem

$$R^T(f) = f[a,b,\xi]\int_a^b (x-a)(x-b)dx \text{, unde } \xi \in [a,b].$$

Folosim acum Propoziţia 8.14 şi obţinem restul exact

$$(11) \qquad R^T(f) = \frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$

unde $\eta \in [a,b]$.

Construim acum o formulă a trapezelor sumată pentru $f \in C^2[a,b]$.

Fie $k \in N, k \geq 1, h = \dfrac{b-a}{k}, x_i = a + ih, i = \overline{0,k}$. Avem

$$I(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} \{\frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] - \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} f''(\xi_i)\},$$

$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = \overline{0,k-1}$

Calculând, obţinem formula trapezelor sumată

$$(12) \qquad Q_s^T(f) = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(a+ih) + f(b)].$$

Deoarece $f \in C^2[a,b]$ există un punct $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$$\sum_{i=0}^{k-1} f''(\xi_i) = kf''(\xi).$$

Astfel restul formulei trapezelor sumate este

$$(13) \qquad R_s^T(f) = -\frac{h^3}{12}kf''(\xi) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi).$$

9.2.4 Formula lui Simpson

Formula lui Simpson este formula Newton-Côtes pentru $n = 2$. Avem în acest caz

$$h = \frac{b-a}{2}, x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b, H_0^2 = H_2^2 = \frac{1}{6}, H_1^2 = \frac{4}{6}$$

(14) $$Q^S(f) = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)].$$

Pentru că n este par folosim Propoziția 9.6 (*iii*). Presupunem că $f \in C^4[a,b]$. Avem

(15) $$R^T(f) = I(f) - Q^T(f) = \int_a^b f[a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} b, x](x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx$$

Folosim acum Teorema de medie pentru integrala din (15)

$$R^S(f) = f[a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} b, \xi]\int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx$$

unde $\xi \in [a,b]$.

Folosim acum Propoziția 8.14 şi obținem restul exact

(16) $$R^S(f) = \frac{f^{(IV)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\eta)$$

unde $\eta \in [a,b]$.

Construim acum o formulă a trapezelor sumată pentru $f \in C^4[a,b]$.

Fie $k \in N, k \geq 1, h = \frac{b-a}{2k}, x_i = a + ih, i = \overline{0,2k}$. Avem

$$I(f) = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1}\{\frac{x_{2i+2}-x_{2i}}{6}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] - \frac{(x_{2i+2}-x_{2i})^5}{2880} f^{(IV)}(\xi_i)\},$$

$\xi_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}], i = \overline{0, k-1}$

Calculând, obținem formula lui Simpson sumată

(17) $$Q_s^T(f) = \frac{h}{3}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{k-1} f(x_{2i+1}) + f(b)].$$

Deoarece $f \in C^4[a,b]$, există un punct $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$$\sum_{i=0}^{k-1} f^{(IV)}(\xi_i) = kf^{(IV)}(\xi).$$

Astfel restul formulei lui Simpson sumată este

(18) $$R_s^S(f) = -\frac{h^5}{90} kf^{(IV)}(\xi) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(IV)}(\xi).$$

9.2.5 Formula trapezelor cu tangentă

Fie $f:[a,b] \to R$, astfel încât există $f'(\frac{a+b}{2})$. Formula trapezelor cu tangentă se obţine astfel

$$Q^{TT}(f) = \int_a^b P(f; \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}; x)dx$$

Cum $P(f; \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}; x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2})$ obţinem

(19) $$Q^{TT}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

Pentru $f \in C^2[a,b]$, restul la aproximare este:

$$R^{TT}(f) = \int_a^b [f(x) - P(f; \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, x)]dx = \int_a^b f[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, x](x - \frac{a+b}{2})^2 dx$$

Folosim acum Teorema de medie pentru integrala de mai sus:

$$R^{TT}(f) = f[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \xi]\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx, \text{ unde } \xi \in [a,b].$$

Folosim acum Propoziţia 8.14 şi obţinem restul exact:

(20) $$R^{TT}(f) = \frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \text{ unde } \eta \in [a,b].$$

Construim acum o formulă a trapezelor cu tangentă sumată, pentru $f \in C^2[a,b]$. Fie $k \in N, k \geq 1, h = \frac{b-a}{2k}, x_i = a + ih, i = \overline{0,2k}$. Avem:

$$I(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} \{(x_{2i+2} - x_{2i})f(x_{2i+1}) + \frac{(x_{2i+2} - x_{2i})^3}{24} f''(\xi_i)\},$$

$\xi_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}], i = \overline{0,k-1}$

Calculând, obţinem formula tapezelor cu tangentă sumată:

(21) $$Q_s^{TT}(f) = 2h\sum_{i=0}^{k-1} f(x_{2i+1}).$$

Deoarece $f \in C^2[a,b]$ există un punct $\xi \in [a,b]$, astfel încât:

$$\sum_{i=0}^{k-1} f''(\xi_i) = kf''(\xi).$$

Astfel restul formulei trapezului cu tangentă sumată este:

$$R_s^{TT}(f) = \frac{h^3}{3} kf''(\xi) = \frac{h^2}{6}(b-a)f''(\xi). \tag{22}$$

Această formulă se numeşte şi formula dreptunghiurilor. Ea se obține, conform Propoziției 9.6 şi astfel $Q^{TT}(f) = \int_a^b P(f; \frac{a+b}{2}; x)dx$.

9.2.6 Formula lui Hérmite

Această formulă se obţine prin integrarea unui polinom de interpolare.
Fie $f:[a,b] \to R$, astfel încât există $f'(a), f'(b)$. Avem:

$$Q^H(f) = \int_a^b P(f; a,a,b,b; x)dx.$$

Folosim pentru calculul polinomului de interpolare formula lui Newton
$P(f;a,a,b,b,x) = f(a) + f[a,a](x-a) + f[a,a,b](x-a)^2 + f[a,a,b,b](x-a)^2(x-b)$
Obținem

$$Q^H(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a) - f'(b)]. \tag{23}$$

Pentru $f \in C^4[a,b]$, restul la aproximare este

$$R^H(f) = f[a,a,b,b\xi]\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx \text{, unde } \xi \in [a,b].$$

Folosim acum Propoziția 8.14 şi obţinem restul exact

$$R^H(f) = \frac{f^{(IV)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx = \frac{(b-a)^5}{720} f^{(IV)}(\eta) \text{, unde } \eta \in [a,b]. \tag{24}$$

Construim o formulă a lui Hérmite sumată pentru $f \in C^4[a,b]$.

Fie $k \in N, k \geq 1, h = \frac{b-a}{k}, x_i = a + ih, i = \overline{0,k}$. Avem:

$$I(f)=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\{\frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]+\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{12}[f'(x_i)-f'(x_{i+1})]+\frac{(x_{i+1}-x_i)^5}{720}f^{(IV)}(\xi_i)\},$$

$\xi_i \in[x_i,x_{i+1}], i=\overline{0,k-1}$

Calculând, obținem formula lui Hérmite sumată

$$(25)\qquad Q_s^H(f)=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{k-1}f(a+ih)+f(b)]+\frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)].$$

Deoarece $f\in C^4[a,b]$, există un punct $\xi\in[a,b]$, astfel încât

$$\sum_{i=0}^{k-1}f^{(IV)}(\xi_i)=kf^{(IV)}(\xi).$$

Astfel restul formulei lui Hérmite sumate este

$$(26)\qquad R_s^H(f)=\frac{h^5}{720}kf^{(IV)}(\xi)=\frac{h^4}{720}(b-a)f^{(IV)}(\xi),\ \xi\in[a,b].$$

9.3 Formulele de cuadratură Gauss

Fie $a,b\in\overline{R}$ şi $\rho:(a,b)\to R$ o funcție continuă pe porțiuni, pozitivă, astfel încât integralele $\int_a^b x^k\rho(x)dx, k\in N, k\geq 0$ sunt absolut convergente. O astfel de funcție se numeşte *pondere*.

Fie $\rho:(a,b)\to R$ o pondere pe (a,b) şi $f:(a,b)\to R$, astfel încât integrala $I(f)=\int_a^b f(x)\rho(x)dx$ este absolut convergentă. Formulele de cuadratură Gauss calculează aproximativ astfel de integrale.

În mulțimea polinoamelor P cu coeficienți în R sau C introducem un produs scalar:

$$(27)\qquad \langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx, f,g\in \mathsf{P}$$

față de care P devine spațiu prehilbertian.

Vom da acum o noua formă pentru Teorema 2.2.6.

Propoziţia 9.9 *Fie* $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *un spaţiu prehilbertian şi* $\{x_i\}_{i\in N}\subset E$ *o mulţime liniar independentă de elemente. Există atunci* $\{y_i\}_{i\in N},\{e_i\}_{i\in N}\subset E$ *astfel încât* $\{y_i\}_{i\in N}$ *este un şir ortogonal şi* $\{e_i\}_{i\in N}$ *este un şir ortonormal cu proprietatea că pentru orice* $n\in N$

$$Sp\{x_0,x_1,\dots,x_n\}=Sp\{y_0,y_1,\dots,y_n\}=Sp\{e_0,e_1,\dots,e_n\}.$$

Elementele şirurilor $\{y_i\}_{i\in N}$ *respectiv* $\{e_i\}_{i\in N}$ *se obţin recurent prin relaţiile*:

(28) $$y_0=x_0, e_0=\frac{y_0}{\|y_0\|},\ y_i=x_i-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{\langle x_i,y_j\rangle}{\langle y_j,y_j\rangle}y_j, e_i=\frac{y_i}{\|y_i\|}, i\ge 1.$$

Demonstraţie. Demonstraţia se face prin inducţie matematică. Evident avem $Sp\{x_0\}=Sp\{y_0\}=Sp\{e_0\}$. Presupunem construite $\{y_0,\dots,y_{i-1}\}$, respectiv $\{e_0,\dots,e_{i-1}\}$ în condiţiile din enunţ. Construim

$$y_i=x_i+\sum_{j=0}^{i-1}a_{ij}y_j.$$

Vom alege coeficienţii $a_{ij}\in K$ astfel încât

$$\langle y_i,y_k\rangle=0, k=\overline{0,i-1}.$$

Avem

$$\langle y_i,y_k\rangle=\langle x_i,y_k\rangle+\sum_{j=0}^{i-1}a_{ij}\langle y_j,y_k\rangle=\langle x_i,y_k\rangle+a_{ik}\langle y_k,y_k\rangle$$

Punând condiţia de ortogonalitate avem

$$a_{ik}=-\frac{\langle x_i,y_k\rangle}{\langle y_k,y_k\rangle}, k=\overline{0,i-1}.$$

Din construcţie avem şi $Sp\{x_0,x_1,\dots,x_i\}=Sp\{y_0,y_1,\dots,y_i\}$.

În spaţiul P , în care avem o structura de spaţiu prehilbertian dată de produsul scalar (27) mulţimea $\{x^i, i\in N\}$ este liniar independentă. Elementele obţinute prin construcţia din Propoziţia 8.9 se numesc *polinoame ortogonale, respectiv ortonormale.* Ele satisfac relaţiile

(29) $$p_0=1, q_0=\frac{p_0}{\|p_0\|},\ p_i=x^i-\sum_{j=0}^{i-1}\frac{\langle x^i,p_j\rangle}{\langle p_j,p_j\rangle}p_j, q_i=\frac{p_i}{\|p_i\|}, i\ge 1.$$

9.3.1 Proprietăți ale polinoamelor ortogonale

În spațiul P al polinoamelor cu coeficienții în R sau C avem o structură de spațiu prehilbertian dată de produsul scalar (27).

Propoziția 9.10 *Polinoamele ortogonale* $(p_n)_{n\geq 0}$ *corespunzătoare ponderii* ρ *satisfac relațiile*

(30) $$p_0(x)=1, p_1(x)=x-\alpha_0, p_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)p_n(x)-\beta_n p_{n-1}(x), n\geq 1,$$
unde

(31) $$\alpha_n=\frac{\langle xp_n,p_n\rangle}{\langle p_n,p_n\rangle}, n\geq 0, \beta_n=\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}, n\geq 1.$$

Demonstrație. Demonstrația se face prin metoda inducției matematice. Conform Propoziției 9.9 avem

$$p_0(x)=1, p_1(x)=x-\frac{\langle x,p_0\rangle p_0}{\|p_0\|^2}=x-\alpha_0.$$

Presupunem acum că $p_0,\dots,p_n$ satisfac relația (30). Notăm

$$r_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)p_n(x)-\beta_n p_{n-1}(x), n\geq 1.$$

Avem

$$\langle r_{n+1},p_{n-1}\rangle=\langle xp_n,p_{n-1}\rangle-\alpha_n\langle p_n,p_{n-1}\rangle-\beta_n\langle p_{n-1},p_{n-1}\rangle=\langle p_n,xp_{n-1}\rangle-\|p_n\|^2=0$$
$$\langle r_{n+1},p_n\rangle=\langle xp_n,p_n\rangle-\alpha_n\langle p_n,p_n\rangle-\beta_n\langle p_{n-1},p_n\rangle=0$$
$$\langle r_{n+1},p_k\rangle=\langle xp_n,p_k\rangle-\alpha_n\langle p_n,p_k\rangle-\beta_n\langle p_{n-1},p_k\rangle=0, k\leq n-2,$$
deoarece $\langle xp_n,p_k\rangle=\langle p_n,xp_k\rangle, xp_k\in Sp\{p_0,\dots,p_{k+1}\}$.

Polinomul r_{n+1} este polinom ortogonal pe $Sp\{p_0,\dots,p_n\}$, unitar, de grad $n+1$ și prin urmare $r_{n+1}=p_{n+1}$.

Propoziția 9.11 *Polinomul ortogonal* p_n *are toate rădăcinile reale, distincte în intervalul* (a, b). *Dacă* $x_1^n,x_2^n,\dots,x_n^n$ *sunt rădăcinile lui* p_n, *atunci*

(32) $$x_i^n=\frac{\langle xL_i^n,L_i^n\rangle}{\|L_i^n\|^2},\ L_i^n(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j^n)}{(x_i^n-x_j^n)}, i=\overline{1,n}.$$

Demonstrație. Presupunem că polinomul p_n are coeficienți în C. Fixăm $i \in \{1,\dots,n\}$. Avem $p_n(x) = (x - x_i^n) r_i^n(x)$, unde r_i^n este un polinom de grad n-1. Atunci

$$\langle p_n, r_i^n \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x r_i^n, r_i^n \rangle - x_i^n \langle r_i^n, r_i^n \rangle = 0 \Leftrightarrow x_i^n = \frac{\langle x r_i^n, r_i^n \rangle}{\|r_i^n\|^2}.$$

De unde $\overline{x_i^n} = \dfrac{\overline{\langle x r_i^n, r_i^n \rangle}}{\|r_i^n\|^2} = \dfrac{\langle r_i^n, x r_i^n \rangle}{\|r_i^n\|^2} = \dfrac{\langle x r_i^n, r_i^n \rangle}{\|r_i^n\|^2} = x_i^n$.

Prin urmare $x_i^n \in R$. Presupunem acum că polinomul are coeficienții în R. Dacă p_n are o rădăcină complexă $\alpha + i\beta$ atunci se divide cu $(x-\alpha)^2 + \beta^2$, $p_n(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2] r(x)$ unde r este polinom de grad n - 2. Avem

$$\langle p_n, r \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x-\alpha)^2 r, r \rangle + \beta^2 \langle r, r \rangle = 0 \Leftrightarrow \|(x-\alpha) r\|^2 + (\beta \|r\|)^2 = 0$$

de unde rezultă $\beta = 0$, care contrazice faptul că rădacina lui p_n este complexă. Dacă polinomul p_n are o rădăcină multiplă de ordinul 2, $\alpha \in R$ avem $p_n(x) = (x-\alpha)^2 r(x)$ unde r este polinom de grad n - 2. Prin urmare:

$$\langle p_n, r \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x-\alpha)^2 r, r \rangle \Leftrightarrow \|(x-\alpha) r\|^2 = 0$$

care conduce la $p_n \equiv 0$. Contradicție. Pentru obținerea formulei (32) este suficient să observăm că pentru $i \in \{1,\dots,n\}$, $r_i^n(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i^n - x_j^n) L_i^n(x)$. Atunci

$$x_i^n = \frac{\langle x r_i^n, r_i^n \rangle}{\|r_i^n\|^2} \Leftrightarrow x_i^n = \frac{\langle x L_i^n, L_i^n \rangle}{\|L_i^n\|^2}.$$

Dacă a sau b sunt finite avem:

$$\int_a^b a (L_i^n(x))^2 \rho(x) dx \le \int_a^b x (L_i^n(x))^2 \rho(x) dx \Leftrightarrow a \le x_i^n,$$

respectiv $\displaystyle\int_a^b b (L_i^n(x))^2 \rho(x) dx \ge \int_a^b x (L_i^n(x))^2 \rho(x) dx \Leftrightarrow b \ge x_i^n$.

Dar $x_i^n \ne a$, respectiv $x_i^n \ne b$. În caz contrar

$x_i^n = a \Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b (x-a)(L_i^n(x))^2 \rho(x) dx = 0$, respectiv $x_i^n = b \Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b (x-b)(L_i^n(x))^2 \rho(x) dx = 0$.

Funcţia integrată este astfel nulă aproape peste tot, ceea ce contrazice definiţia ponderii.

Propoziţia 9.12 *Pentru orice* $n \geq 1$, *rădăcinile polinoamelor* p_n *şi* p_{n-1} *satisfac relaţia*:

$$a < x_1^n < x_1^{n-1} < x_2^n < x_2^{n-1} < \ldots < x_{n-1}^{n-1} < x_n^n < b.$$

Demonstraţie. Demonstrăm propoziţia prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$ afirmaţia rezultă din propoziţia precedentă. Presupunem afirmaţia adevărată pentru n şi demonstrăm pentru $n + 1$. Avem din Propoziţia 9.10

$$p_{n+1}(x_j^n)p_{n+1}(x_{j+1}^n) = \beta_n^2 p_{n-1}(x_j^n)p_{n-1}(x_{j+1}^n) < 0, j = \overline{1,n-1}$$
$$p_{n+1}(x_1^n) = -\beta_n p_{n-1}(x_1^n),\ p_{n+1}(x_n^n) = -\beta_n p_{n-1}(x_n^n) < 0.$$
$$\lim_{x \to +\infty} p_k(x) = +\infty, k \geq 1\ \lim_{x \to -\infty} p_k(x) = (-1)^k \infty, k \geq 1.$$

Prin urmare există $x_{j+1}^{n+1} \in (x_j^n, x_{j+1}^n)$ astfel încât $p_{n+1}(x_{j+1}^{n+1}) = 0, j = \overline{1,n-1}$. Dar $\lim_{x \to b} p_k(x) > 0, k \geq 1$, respectiv $\lim_{x \to a} p_k(x), k \geq 1$ are semnul $(-1)^k$. Avem astfel $\lim_{x \to b} p_{n+1}(x)p_{n+1}(x_n^n) < 0$ şi $\lim_{x \to a} p_{n+1}(x)p_{n+1}(x_1^n) < 0$. De aici rezultă că există $x_1^{n+1} \in (a, x_1^n)$ şi $x_{n+1}^{n+1} \in (x_n^n, b)$ astfel încât $p_{n+1}(x_1^{n+1}) = p_{n+1}(x_{n+1}^{n+1}) = 0$.

Propoziţia 9.13 *Dacă ponderea* $\rho : (-a,a) \to R$ *este o funcţie pară atunci polinoamele ortogonale corespunzătoare ponderii* ρ *satisfac relaţia*

(33) $$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x), n \geq 0.$$

Demonstraţie. Vom demonstra relaţia (33) prin inducţie matematică.
Conform propoziţiei 9.10 avem

$$\alpha_0 = \frac{\langle xp_0, p_0 \rangle}{\langle p_0, p_0 \rangle} = \frac{\int_{-a}^{a} x\rho(x)dx}{\|p_0\|^2} = \frac{\int_{-a}^{a} (-x)\rho(-x)dx}{\|p_0\|^2} = -\frac{\int_{-a}^{a} x\rho(x)dx}{\|p_0\|^2} = -\alpha_0$$

De unde $\alpha_0 = 0$ şi $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$. Astfel formula (33) este adevărată pentru $n = 0$ şi $n = 1$. Presupunând formula adevărată pentru polinoamele $p_0, \ldots, p_n$ demonstrăm pentru p_{n+1}. Avem

$$\alpha_n = \frac{\langle xp_n, p_n\rangle}{\langle p_n, p_n\rangle} = \frac{\int_{-a}^{a} x(p_n(x))^2 \rho(x)dx}{\|p_n\|^2} = \frac{\int_{-a}^{a} (-x)(p_n(-x))^2 \rho(-x)dx}{\|p_n\|^2} = -\alpha_n .$$

şi deci formula de recurenţă devine

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x).$$

Dar

$$p_{n+1}(-x) = -xp_n(-x) - \beta_n p_{n-1}(-x)$$

de unde

$$p_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1}[xp_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x)] = (-1)^{n+1} p_{n+1}(x).$$

Propoziţia 9.14 (Formulele Christoffel-Darboux). *Considerăm şirul* $(q_n)_{n\geq 0}$ *al polinoamelor ortonormale, corespunzătoare ponderii* ρ. *Atunci pentru* $x \neq y$ *avem*

(34) $$\sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_k(y) = \frac{\|p_{n+1}\|}{\|p_n\|} \frac{q_{n+1}(x)q_n(y) - q_n(x)q_{n+1}(y)}{x-y}$$

(35) $$\sum_{k=0}^{n} q_k^2(x) = \frac{\|p_{n+1}\|}{\|p_n\|}[q'_{n+1}(x)q_n(x) - q_{n+1}(x)q'_n(x)].$$

Demonstraţie. Folosim Propoziţia 9.10. Înlocuim $p_n = \|p_n\| q_n$ şi avem

$$q_0(x) = \frac{1}{\|p_0\|}, q_1(x) = \frac{p_1(x)}{\|p_1\|}, q_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\frac{\|p_n\|}{\|p_{n+1}\|}q_n(x) - \beta_n \frac{\|p_{n-1}\|}{\|p_{n-1}\|}q_{n-1}(x), n \geq 1$$

Pentru $x \neq y$ avem

$$\frac{\|p_{n+1}\|}{\|p_n\|} \frac{q_{n+1}(x)q_n(y) - q_{n+1}(y)q_n(x)}{x-y} = \frac{1}{x-y}[(x-y)q_n(x)q_n(y) +$$

$$+\frac{\|p_n\|}{\|p_{n-1}\|}(q_n(x)q_{n-1}(y) - q_n(y)q_{n-1}(x)]$$

Iterând această relaţie se obţine (34). Pentru formula (35) trecem la limită în (34) cu $y \to x$.

Cazuri particulare de polinoame ortogonale.

1. Polinoame Legendre, notate P_n, sunt polinoamele ortogonale corespunzătoare ponderii $\rho:[-1,1]\to R, \rho(x)=1$.

2. Polinoame Cebâşev, notate T_n, sunt polinoamele ortogonale corespunzătoare ponderii $\rho:(-1,1)\to R, \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Polinoame Cebâşev de speţa a doua, notate U_n, sunt polinoamele ortogonale corespunzătoare ponderii $\rho:(-1,1)\to R, \rho(x)=\sqrt{1-x^2}$.

4. Polinoame Jacobi, notate $P_n^{\alpha,\beta}$, sunt polinoamele ortogonale corespunzătoare ponderii $\rho:(-1,1)\to R, \rho(x)=(1+x)^\alpha(1-x)^\beta$, unde $\alpha>-1, \beta>-1$.

5. Polinoame Laguerre, notate L_n, sunt polinoamele ortogonale corespunzătoare ponderii $\rho:(0,+\infty)\to R, \rho(x)=x^\alpha e^{-x}, \alpha>0$.

6. Polinoame Hérmite, notate H_n, sunt polinoamele ortogonale corespunzătoare ponderii $\rho:R\to R, \rho(x)=e^{-x^2}$

9.3.2 Formule de cuadratură Gauss

Teorema 9.15 *Fie $\{a_1,\dots,a_n\}$ reale, strict pozitive şi $\{x_1,\dots,x_n\}\subset R$ distincte două câte două. Sunt echivalente*

$$(i) \qquad \langle p,1\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i p(x_i)$$

pentru orice polinom p de grad mai mic sau egal cu 2n - 1.

(ii) $\{x_1,\dots,x_n\}\subset R$ sunt rădăcinile polinomului ortogonal p_n corespunzător ponderii ρ şi pentru orice $i\in\{1,\dots,n\}$ avem

$$(36) \qquad a_i=\langle L_i,1\rangle=\langle L_i,L_i\rangle \ , \ L_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Demonstrație. $(i) \Rightarrow (ii)$: Pentru orice $k \in \{0,\dots,n-1\}$ vom construi polinomul $r_k(x) = x^k \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, polinom de grad $\le 2n-1$. Avem

$$\langle r_k, 1\rangle = \left\langle x^k, \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i r_k(x_i) = 0.$$

Deci polinomul $s(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ de grad n este ortogonal pe $Sp\{1,\dots,x^{n-1}\}$ în raport cu produsul scalar (27), indus de ponderea ρ. Prin urmare $s \equiv p_n$. Pentru $i \in \{1,\dots,n\}$ avem

$$\langle L_i, 1\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j L_i(x_j) = a_i \quad ; \quad \langle L_i, L_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j L_i^2(x_j) = a_i$$

deoarece gradul lui L_j este n - 1.$(ii) \Rightarrow (i)$. Fie p un polinom de grad cel mult n-1. Avem relațiile:

$$p(x) = P(p; x_1,\dots,x_n; x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i(x)$$

$$\langle p, 1\rangle = \int_a^b p(x)\rho(x)dx = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \int_a^b L_i(x)\rho(x)dx = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\langle L_i, 1\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i p(x_i).$$

Fie p un polinom cu gradul mai mare sau egal cu n şi cel mult $2n$-1. Împărțind p la p_n obținem $p = qp_n + r$, unde q şi r sunt polinoame de grad cel mult n-1. Avem

$$\langle p, 1\rangle = \langle qp_n + r, 1\rangle = \langle qp_n, 1\rangle + \langle r, 1\rangle = \langle q, p_n\rangle + \langle r, 1\rangle = \langle r, 1\rangle$$

$$\langle p, 1\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i r(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i p(x_i)$$

Pentru orice $n \in N, n \ge 1$, vom construi o formulă de cuadratură pentru $I(f) = \int_a^b f(x)\rho(x)dx$ definită prin

(37) $$Q_n^G(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

unde numerele $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset R$ sunt rădăcinile polinomului ortogonal p_n corespunzător ponderii ρ, iar coeficienţii $\{a_1,\ldots,a_n\}$ sunt definiţi de formulele (36).

Teorema 9. 16 *Sunt adevărate afirmaţiile:*

(*i*) $I(p)=Q_n^G(p)$ *pentru orice polinom p de grad cel mult* $2n$ - 1.

(*ii*) *Dacă* $f\in C^{2n}(a,b)$ *şi există* $\sup\limits_{x\in(a,b)}\left|f^{(2n)}(x)\right|$ *atunci*

(38) $$\left|I(f)-Q_n^G(f)\right|\le\frac{\|p_n\|^2}{(2n)!}\sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(2n)}(x)\right|.$$

(*iii*) *Dacă* $\rho\in C[a,b]$ *atunci* $Q_n^G\xrightarrow{s}I$ *în* $C[a,b]$.

Demonstraţie. (*i*). Rezultă din Teorema 9.14. Pentru (*ii*), conform Teoremei 8.10 pentru orice $x\in(a,b)$, avem

$$f(x)=P(f;x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n;x)+f[x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,x]p_n^2(x)$$

gradul polinomului de interpolare fiind cel mult $2n-1$. Din (*i*) avem

$$I(f)=Q_n^G(f)+\int_a^b f[x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,x]p_n^2(x)\rho(x)dx.$$

Dar pentru că $f\in C^{2n}(a,b)$, există $\xi_x\in(a,b)$, astfel încât

$$f[x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,x]=\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}.$$

În final avem $\left|I(f)-Q_n^G(f)\right|\le\sup\limits_{x\in(a,b)}\left|f^{(2n)}(x)\right|\int_a^b p_n^2(x)\rho(x)dx$ care reprezintă formula (38). (*iii*). Este suficient să arătăm că sunt îndeplinite condiţiile din Consecinţa 9.3. Avem

$$\left\|Q_n^G\right\|=\sum_{i=1}^n a_i=I(1)=\int_a^b\rho(x)dx.$$

Pentru orice $k\in N$ avem $I(x^k)=Q_n^G(x^k),k\le 2n-1$. Prin urmare $Q_n^G(x^k)\xrightarrow[n]{}I(x^k)$, deoarece pentru $n\ge\frac{k+1}{2}$ avem $I(x^k)=Q_n^G(x^k)$.

Propoziţia 9.17 *Coeficienţii* $\{a_1,\ldots,a_n\}$ *satisfac relaţiile:*

(39) $$a_i = \frac{1}{(p_n'(x_i))^2}\int_a^b \frac{p_n^2(x)}{(x-x_i)^2}dx,\ i=\overline{1,n}.$$

(40) $$a_i = \frac{1}{(q_n'(x_i))^2}\int_a^b \frac{q_n^2(x)}{(x-x_i)^2}dx,\ i=\overline{1,n}.$$

(41) $$a_i = -\frac{\|p_n\|}{\|p_{n+1}\|}\frac{1}{q_{n+1}(x_i)q_n'(x_i)},\ i=\overline{1,n}.$$

(42) $$\frac{1}{a_i} = \sum_{j=1}^{n-1} q_j^2(x_i) \qquad ,\ i=\overline{1,n}.$$

Demonstrație. Calculăm a_i după formula (34)

$$a_i = \langle L_i, L_i\rangle = \int_a^b L_i^2(x)\rho(x)dx = \int_a^b \frac{p_n^2(x)}{(x-x_i)^2}\left(\frac{(x-x_i)^2}{p_n^2(x)}\right)\Big|_{x=x_i}\rho(x)dx.$$

Înlocuim $\left.\dfrac{x-x_i}{p_n(x)}\right|_{x=x_i} = \dfrac{1}{p_n'(x_i)}$ și $q_n = \dfrac{p_n}{\|p_n\|}$ în relația de mai sus și obținem formulele (39), (40). Pentru formulele(41) vom folosi pentru a_i formula

$$a_i = \langle L_i, 1\rangle = \int_a^b L_i(x)\rho(x)dx = \int_a^b \frac{q_n(x)}{x-x_i}\left(\frac{x-x_i}{q_n(x)}\right)\Big|_{x=x_i}\rho(x)dx.$$

Înlocuim $\left.\dfrac{x-x_i}{q_n(x)}\right|_{x=x_i} = \dfrac{1}{q_n'(x_i)}$ și obținem $a_i = \dfrac{1}{q_n'(x_i)}\displaystyle\int_a^b \frac{q_n(x)}{x-x_i}\rho(x)dx.$

Folosim acum Formula Christoffel-Darboux

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_k(x_i) = \frac{\|p_{n+1}\|}{\|p_n\|}\frac{q_{n+1}(x)q_n(x_i) - q_n(x)q_{n+1}(x_i)}{x-x_i}.$$

De aici

$$-\frac{q_{n+1}(x_i)q_n(x)}{x-x_i} = \frac{\|p_n\|}{\|p_{n+1}\|}\sum_{k=0}^{n-1} q_k(x)q_k(x_i).$$

Înlocuim în formula lui a_i și obținem

$$a_i = -\frac{1}{q_n'(x_i)q_{n+1}(x_i)}\frac{\|p_n\|}{\|p_{n+1}\|}\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b q_k(x)q_k(x_i)\rho(x)dx = -\frac{\|p_n\|}{\|p_{n+1}\|}\frac{1}{q_{n+1}(x_i)q_n'(x_i)},$$

unde la ultima egalitate am folosit ortonormalitatea şirului $(q_k)_{k\geq 0}$. Acum în a doua formulă Christoffel-Darboux înlocuind x cu x_i obţinem

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_k^2(x_i) = -\frac{\|p_n\|}{\|p_{n+1}\|}q_{n+1}(x_i)q_n'(x_i).$$

Înlocuind această identitate în formula (41) obţinem (42).

Exlemplu. Vom construi formula lui Gauss pentru ponderea $\rho(x) = 1, x \in [-1,1]$.

Polinomul Legendre ortogonal, de grad n este:

$$P_n(x) = c_n((x^2-1)^n)^{(n)} \text{ cu } c_n = \frac{n!}{(2n)!}.$$

Este suficient să arătăm relaţia $\langle p, P_n\rangle = 0$, pentru orice polinom de grad cel mult n-1. Folosind formula de integrare prin părţi avem

$$\langle p, P_n\rangle = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} p(x)((x^2-1)^n)^{(n)}dx = \frac{n!}{(2n)!}[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p^{(k-1)}(x)((x^2-1)^n)^{(n-k)}\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+(-1)^n\int_{-1}^{1} p^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx = 0$$

Calculăm norma polinomului P_n:

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n\rangle = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}((x^2-1)^n)^{(n)}x^n dx.$$

Integrând prin părţi avem:

$$\|P_n\|^2 = \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{(n!)^4 2^{2n+1}}{((2n)!)^2(2n+1)} \text{ şi } \|P_n\| = \frac{(n!)^2 2^n\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{2n+1}}.$$

Fie $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$, rădăcinile polinomului P_n. Formula Gauss în acest caz este $Q_n^G(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$. Coeficienţii sunt calculaţi din formulele (41)

$$a_i = -\frac{\|P_n\|^2}{P_{n+1}(x_i)P_n'(x_i)}, i = \overline{1,n}.$$

Avem adevărate relațiile

$$P_{n+1}(x) = c_{n+1}((x^2-1)^{n+1})^{(n+1)} =$$
$$= c_{n+1}[((x^2-1)^n)^{(n+1)}(x^2-1) + 2(n+1)x((x^2-1)^n)^{(n)} + n(n+1)((x^2-1)^n)^{(n-1)}]$$
$$((x^2-1)^n)^{(n+1)}(x^2-1) = n(n+1)((x^2-1)^n)^{(n-1)}$$

de unde

$$P_{n+1}(x) = \frac{c_{n+1}}{c_n}[2(x^2-1)p_n'(x) + 2(n+1)xp_n(x)]$$

$$P_{n+1}(x_i) = 2\frac{c_{n+1}}{c_n}(x_i^2-1)p_n'(x_i).$$

Cu această relație obținem

$$a_i = \frac{\|P_n\|^2(2n+1)}{(1-x_i^2)(P_n'(x_i))^2}, i = \overline{1,n}.$$

Observăm că pentru pentru $f \in C[a,b]$, putem folosi această formulă de cuadratură la calculul integralei $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, deoarece avem egalitatea:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt.$$

În acest caz avem

$$Q_n^G(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n a_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i\right).$$

Capitolul 10

Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale

10.1 Problema Cauchy

Fie $f:[a,b]\times R^n \to R^n$, $f(x,y)=(f_1(x,y),\ldots,f_n(x,y))$.

Considerăm ecuația diferențială de ordinul întâi

(1) $$y'(x)=f(x,y(x)), x\in[a,b].$$

O *soluție* a ecuației (1) este o funcție $y\in C^1[a,b]$ care verifică ecuația.

Spunem că pentru ecuația (1) se pune *Problema Cauchy*, dacă se cere determinarea unei soluții y pentru ecuația (1), astfel încât valoarea sa într-un punct $x_0\in[a,b]$ să fie $y_0\in R^n$. Perechea $(x_0,y_0)\in[a,b]\times R^n$ reprezintă *condiția inițială.*

Problema Cauchy pe care o vom considera este

(2) $$\begin{cases} u'(x)=f(x,u(x)), x\in[a,b] \\ u(a)=\alpha\in R^n \end{cases}$$

Presupunem că (2) admite soluție unică $u:[a,b]\to R^n$.

În spațiul $C[a,b]$, al funcțiilor continue pe $[a,b]$ cu valori în R^n, vom folosi norma $\|g\|=\max\limits_{t\in[a,b]}\|g(t)\|$.

Fie $h \in (0, b-a]$ şi $N_h = \left[\dfrac{b-a}{h}\right]$. Notăm

$$[a,b]_h = \{x = a + jh \mid j = \overline{0, N_h}\}$$

rețeaua de puncte echidistante, cu pasul h,de pe intervalul $[a, b]$ şi

$$[a,b]_h' = \{x = a + jh \mid j = \overline{0, N_h - 1}\}$$

rețeaua redusă de puncte echidistante, cu pasul h, de pe intervalul $[a, b]$.

Pentru fiecare $h \in (0, b-a]$ considerăm $\alpha_h \in R^n$ şi o funcție $f_h : [a,b]_h' \times R^n \to R^n$. Ataşăm Problemei Cauchy (2) sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{u_h(x+h) - u_h(x)}{h} = f_h(x, u_h(x)), x \in [a,b]_h' \\ u_h(a) = \alpha_h \end{cases} \tag{3}$$

care determină valorile funcției $u_h : [a,b]_h \to R^n$.

Relațiile (3) se numesc *ecuațiile apropiate* ataşate Problemei Cauchy (2) sau *metodă de aproximare* pentru Problema Cauchy (2).

10.2 Consistența metodelor de aproximare

Pentru fiecare $h \in (0, b-a]$ definim *eroarea de trunchiere*

$$T_h : [a,b]_h' \to R^n, T_h(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - f_h(x, u(x)). \tag{4}$$

Metoda de aproximare (3) este *consistentă* cu Problema Cauchy (2) dacă

$$\lim_{h \to 0} (\|\alpha_h - \alpha\| + \max_{x \in [a,b]_h'} \|T_h(x)\|) = 0. \tag{5}$$

Pentru $r > 0$, notăm prin G_r mulțimea compactă

$$G_r = \{(x,y) \in [a,b] \times R^n \mid \|y - u(x)\| \le r\}. \tag{6}$$

Metoda de aproximare (3) este *consistentă de ordinul* $p \in N, p \ge 1$ cu Problema Cauchy (5), dacă există $M > 0, h_0 > 0$ astfel încât

(7) $$\|\alpha_h-\alpha\|+\max_{x\in[a,b]_h'}\|T_h(x)\|\le Mh^p, h\le h_0.$$

M se numeşte *constanta de consistenţă.*

Vom spune că funcţiile $(f_h)_{h>0}$ stabilesc o condiţie de tip (L) dacă există $r>0, L>0, h_0>0$, astfel încât

(8) $$\|f_h(x,y)-f_h(x,y')\|\le L\|y-y'\|$$

pentru orice $(x,y),(x,y')\in G_r, h\le h_0$.

Teorema 10.1 *Fie* $r>0$ *şi* $f\in C(G_r)$. *Sunt echivalente*:
(i) *Metoda de aproximare* (3) *este consistentă cu Problema Cauchy* (2).
(ii) $\lim_{h\to 0}\|\alpha_h-\alpha\|=0, \lim_{h\to 0}\max_{x\in[a,b]_h'}\|f(x,u(x))-f_h(x,u(x))\|=0$.

Demonstraţie. Pentru orice $x\in[a,b]_h'$ avem:
$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u'(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[u'(t)-u'(x)]dt$$
$$\left\|\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u'(x)\right\|\le\max_{t\in[x,x+h]}\|u'(t)-u'(x)\|.$$

Funcţia $u':[a,b]\to R^n$ este uniform continuă pe $[a,b]$. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$, există $\eta_\varepsilon>0$, astfel încât pentru orice $s,s'\in[a,b], |s-s'|<\eta_\varepsilon$ avem $\|u'(s)-u'(s')\|<\varepsilon$. Prin urmare, dacă $h<\eta_\varepsilon$ avem $\max_{t\in[x,x+h]}\|u'(t)-u'(x)\|<\varepsilon$. Am demonstrat astfel relaţia:

$$\lim_{h\to 0}\max_{x\in[a,b]_h'}\left\|\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u'(x)\right\|=0.$$

Dacă ţinem seama de identitatea următoare:
$$T_h(x)=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u'(x)+f(x,u(x))-f_h(x,u(x)), x\in[a,b]_h',$$
teorema este demonstrată.

Teorema 10. 2. (*i*) *Metoda de aproximare* (3) *este consistentă cu Problema Cauchy* (2) *şi funcţiile* $(f_h)_{h>0}$ *stabilesc condiţia de tip* (*L*) *dată de relaţia* (8). *Atunci există* $h' > 0$, *astfel încât pentru* $h \le h'$ *avem*

(9) $$\|u_h(x) - u(x)\| \le (\|\alpha_h - \alpha\| + (x-a)\max_{t\in[a,b]_h'}\|T_h(t)\|)e^{L(x-a)}, x \in [a,b]_h$$

(*ii*) *Metoda de aproximare* (3) *este consistentă de ordinul p cu Problema Cauchy* (2) *şi funcţiile* $(f_h)_{h>0}$ *stabilesc condiţia de tip* (*L*) *dată de relaţia* (8). *Atunci există* $h' > 0$, *astfel încât pentru* $h \le h'$ *avem*:

(10) $$\|u_h(x) - u(x)\| \le (1 + x - a)Mh^p e^{L(x-a)}, x \in [a,b]_h,$$

unde M este constanta de consistenţă.

Demonstraţie. (*i*) Demonstraţia se face prin recurenţă. Pentru $x = a$ relaţia este adevărată.

Deoarece metoda de aproximare este consistentă cu Problema Cauchy (2) avem $\lim\limits_{h\to 0}(\|\alpha_h - \alpha\| + \max\limits_{x\in[a,b]_h'}\|T_h(x)\|) = 0$. Prin urmare există $h' \le h_0$ astfel încât pentru $h \le h'$, $\|\alpha_h - \alpha\| + \max\limits_{x\in[a,b]_h'}\|T_h(x)\| \le \frac{r}{c}$, unde $c = (1 + b - a)e^{L(b-a)}$.

Presupunem relaţia adevărată pentru $x \in [a,b]_h'$ şi o demonstrăm pentru $x + h$. Folosind ecuaţiile apropiate şi expresia erorii de trunchiere avem:

$$u_h(x+h) - u(x+h) = u_h(x) + hf_h(x, u_h(x)) - hT_h(x) - u(x) - hf_h(x, u(x))$$
$$\|u_h(x+h) - u(x+h)\| \le \|u_h(x) - u(x)\| + h\|f_h(x, u_h(x)) - f_h(x, u(x))\| + h\|T_h(x)\|.$$

Din ipoteza de recurenţă este adevărată relaţia

$$\|u_h(x) - u(x)\| \le (1 + b - a)(\|\alpha_h - \alpha\| + \max_{x\in[a,b]_h'}\|T_h(x)\|)e^{L(b-a)}.$$

Pentru $h \le h'$ avem $(x, u_h(x)) \in G_r$. Folosind acum proprietatea (*L*) avem $\|u_h(x+h) - u(x+h)\| \le (1 + hL)\|u_h(x) - u(x)\| + h\|T_h(x)\| \le e^{hL}\|u_h(x) - u(x)\| + h\|T_h'(x)\|$

Folosind inegalitatea din ipoteză de recurenţă se obţine relaţia (9).

(*ii*) Demonstraţia se face prin recurenţă. Pentru $x = a$ relaţia este adevărată.

$$(1 + b - a)Mh^p e^{L(b-a)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Prin urmare există $h' \le h_0$ astfel încât pentru $h \le h'$ avem

$$(1 + b - a)Mh^p e^{L(b-a)} \le r.$$

Presupunem relaţia adevărată pentru $x \in [a,b]_h'$ şi o demonstrăm pentru $x + h$.

Din ipoteza de recurenţă $\|u_h(x) - u(x)\| \le (1 + b - a)Mh^p e^{L(b-a)}$. Pentru $h \le h'$ avem $(x, u_h(x)) \in G_r$. Folosind acum proprietatea (*L*) obţinem

$$\|u_h(x+h)-u(x+h)\| \le (1+hL)\|u_h(x)-u(x)\| + h\|T_h(x)\| \le e^{hL}(1+x-a)e^{L(x-a)}Mh^p + h\|T_h(x)\|$$

Deoarece metoda de aproximare este consistentă, de ordinul p cu Problema Cauchy (5), avem:

$$\|\alpha_h - \alpha\| + \max_{x\in[a,b]_h'}\|T_h(x)\| \le Mh^p, h \le h_0.$$

De aici se obține

$$\|u_h(x+h)-u(x+h)\| \le e^{hL}(1+x-a)e^{L(x-a)}Mh^p + hMh^p \le (1+x+h-a)e^{L(x+h-a)}Mh^p.$$

$$\|u_h(x)-u(x)\| \le (1+b-a)(\|\alpha_h-\alpha\| + \max_{t\in[a,b]_h'}\|T_h(t)\|)e^{L(b-a)}, x\in[a,b]_h.$$

10.3 Convergența metodelor de aproximare

In continuare vom folosi notația:

$$D_h v(x) = \frac{v(x+h)-v(x)}{h}, x \in [a,b]_h',$$

diferența divizată a funcției $v:[a,b]_h \to R^n$ corespunzătoare pasului h.

Teorema 10.3 *Presupunem că funcțiile* $(f_h)_h$ *îndeplinesc condiția* (8) *de tip* (L) *și* $f \in C(G_r)$. *Sunt echivalente*:
(i) *Metoda de aproximare* (3) *este consistentă cu Problema Cauchy* (2).
(ii) $\lim_{h\to 0}\max_{x\in[a,b]_h}\|u_h(x)-u(x)\| = 0, \lim_{h\to 0}\max_{x\in[a,b]_h'}\|D_h u_h(x) - u'(x)\| = 0$.

Demonstrație. (i) $\Rightarrow$ (ii). Vom folosi pentru început Teorema 10.2. Există $h' > 0$ astfel încât pentru $h \le h'$ avem:

$$\|u_h(x)-u(x)\| \le (\|\alpha_h-\alpha\| + (x-a)\max_{x\in[a,b]_h'}\|T_h(x)\|)e^{L(x-a)}, x\in[a,b]_h.$$

De aici prin majorare obținem:

$$\|u_h(x)-u(x)\| \le (1+b-a)(\|\alpha_h-\alpha\| + \max_{t\in[a,b]_h'}\|T_h(t)\|)e^{L(b-a)}, x\in[a,b]_h.$$

Din consistența metodei de aproximare avem:

$$\lim_{h\to 0}(\|\alpha_h-\alpha\| + \max_{t\in[a,b]_h'}\|T_h(t)\|) = 0.$$

de unde prima relație (ii). Pentru cea de a doua relație calculăm

$$D_h u_h(x) - u'(x) = D_h u_h(x) - D_h u(x) + D_h u(x) - u'(x), x\in[a,b]_h'.$$
$$D_h u_h(x) - D_h u(x) = f_h(x,u_h(x)) - f_h(x,u(x)) - T_h(x), x\in[a,b]_h'.$$

Din prima relaţie (*ii*), există $h_1 > 0$, astfel încât pentru $h \le h_1$ avem $\max_{x \in [a,b]_h} \|u_h(x) - u(x)\| \le r$. Prin urmare $(x, u_h(x)) \in G_r$, pentru $h \le h_1$. Astfel avem

$$\|D_h u_h(x) - D_h u(x)\| \le \|u_h(x) - u(x)\| + \|T_h(x)\|, x \in [a,b]'_h, h \le h_1.$$

Deoarece $f \in C(G_r)$, folosind prima parte a demonstraţiei Teoremei 10.1, avem relaţia $\lim_{h \to 0} \max_{x \in [a,b]'_h} \left\| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right\| = 0$.

În final folosim condiţia (*L*) şi avem inegalitatea

$$\|D_h u_h(x) - u'(x)\| \le L\|u_h(x) - u(x)\| + \|D_h u(x) - u'(x)\|, x \in [a,b]'_h, h \le h_1$$

de unde obţinem a doua inegalitate (*ii*). (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). Folosim Teorema 10.1. Avem din prima relaţie (*ii*), $\|\alpha_h - \alpha\| \le \max_{x \in [a,b]_h} \|u_h(x) - u(x)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Dar

$$\|f(x, u(x)) - f_h(x, u(x))\| \le \|u'(x) - D_h u_h(x)\| + \|D_h u_h(x) - f_h(x, u(x))\|$$

echivalent cu

$$\|f(x, u(x)) - f_h(x, u(x))\| \le \|u'(x) - D_h u_h(x)\| + \|f_h(x, u_h(x)) - f_h(x, u(x))\|.$$

Din prima relaţie (*ii*), există $h_1 > 0$, astfel încât pentru $h \le h_1$ avem $\max_{x \in [a,b]_h} \|u_h(x) - u(x)\| \le r$. Prin urmare $(x, u_h(x)) \in G_r$, pentru $h \le h_1$. Astfel

$$\|f(x, u(x)) - f_h(x, u(x))\| \le \|u'(x) - D_h u_h(x)\| + L\|u_h(x) - u(x)\|, h \le h_1.$$

Folosind acum (*ii*) avem

$$\lim_{h \to 0} \max_{x \in [a,b]'_h} \|f(x, u(x)) - f_h(x, u(x))\| = 0,$$

care demonstrează consistenţa metodei.

Erorile care se fac prin trecerea de la ecuaţia (2) la ecuaţiile apropiate (3) se numesc erori de discretizare. Teorema 10.3 spune ca aceste erori sunt mici atâta timp cât h este mic.

În practică, la trecerea de la ecuaţia (2) la ecuaţiile apropiate (3) se fac erori de rotunjire, care nu descresc neapărat în raport cu *h*. Se pot da condiţii de stabilitate astfel încât erorile finale să rămînă în anumite limite.

Pentru fiecare $h \in (0, b-a]$ considerăm $\sigma_h \in R^n$ şi o funcţie

$$S_h : [a,b]_h' \to R^n .$$

Ataşăm ecuaţiilor apropiate (3) sistemul de ecuaţii:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \dfrac{v_h(x+h) - v_h(x)}{h} = f_h(x, u_h(x)) + S_h(x), x \in [a,b]_h' \\ v_h(a) = \alpha_h + \sigma_h \end{cases}$$

care determină valorile funcţiei $v_h : [a,b]_h \to R^n$. Aceste ecuaţii se numesc *ecuaţiile perturbate*.

Metoda de aproximare (3) se numeşte *stabilă* dacă are loc proprietatea: există $h_0 > 0$, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice h, $h \le h_0$, dacă

$$\|\sigma_h\| + \max_{x \in [a,b]_h'} \|S_h(x)\| < \eta_\varepsilon$$

atunci

$$\max_{x \in [a,b]_h} \|u_h(x) - v_h(x)\| + \max_{x \in [a,b]_h'} \|D_h u_h(x) - D_h v_h(x)\| < \varepsilon .$$

Teorema 10.4 *Presupunem că funcţiile* $(f_h)_h$ *îndeplinesc condiţia* (8) *de tip* (L) *şi metoda de aproximare* (3) *este consistentă cu Problema Cauchy* (2). *Atunci există* $h_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ *astfel încât pentru orice* h, $h \le h_0$ *avem* $\|\sigma_h\| + \max_{x \in [a,b]_h'} \|S_h(x)\| < \delta_0$ *şi au loc afirmaţiile*:

(i) $\|u_h(x) - v_h(x)\| \le (\|\sigma_h\| + (x-a) \max_{t \in [a,b]_h'} \|S_h(t)\|) e^{L(x-a)}, x \in [a,b]_h$.

(ii) $\|D_h u_h(x) - D_h v_h(x)\| \le L\|u_h(x) - v_h(x)\| + \|S_h(x)\|, x \in [a,b]_h'$.

(iii) *Metoda de aproximare* (3) *este stabilă.*

Demonstraţie.(i) Demonstrăm relaţia prin recurenţă. Pentru $x = a$ relaţia este adevărată. Presupunem relaţia adevărată pentru $x \in [a,b]_h'$ şi o demonstrăm pentru $x + h$. Folosind ecuaţiile apropiate şi ecuaţiile perturbate avem:

$$u_h(x+h) - v_h(x+h) = u_h(x) + hf_h(x, u_h(x)) - hS_h(x) - v_h(x) - hf_h(x, v_h(x))$$

$$\|u_h(x+h) - v_h(x+h)\| \le \|u_h(x) - v_h(x)\| + h\|f_h(x, u_h(x)) - f_h(x, v_h(x))\| + h\|S_h(x)\|$$

Din Teorema 10.2, există $h' > 0$ astfel încât pentru $h \le h'$

$$\|u_h(x) - u(x)\| \le (\|\alpha_h - \alpha\| + (x-a) \max_{x \in [a,b]_h'} \|T_h(x)\|) e^{L(x-a)}, x \in [a,b]_h$$

De aici prin majorare avem

$$\|u_h(x)-u(x)\| \le (1+b-a)(\|\alpha_h-\alpha\| + \max_{x\in[a,b]_h}\|T_h(x)\|)e^{L(b-a)}.$$

Folosind acum şi ipoteza avem

$$\|v_h(x)-u(x)\| \le \|u_h(x)-v_h(x)\| + \|u_h(x)-u(x)\| \le$$
$$\le c(\|\sigma_h\| + \max_{t\in[a,b]'_h}\|S_h(t)\| + c(\|\alpha_h-\alpha\| + \max_{t\in[a,b]_h}\|T_h(t)\|)$$

unde $c=(1+b-a)e^{L(b-a)}$.

Din consistenţa metodei de aproximare (3) cu Problema Cauchy (2) avem: $\lim_{h\to 0}(\|\alpha_h-\alpha\| + \max_{x\in[a,b]_h}\|T_h(x)\|)=0$. Prin urmare există $h_0 \le h'$ astfel încât pentru $h\le h_0$, $\|\alpha_h-\alpha\| + \max_{x\in[a,b]_h}\|T_h(x)\| \le \frac{r}{2c}$. Alegem $\delta_0 \le \frac{r}{2c}$. Pentru $h\le h_0$ avem $(x,u_h(x)),(x,v_h(x)) \in G_r$. Folosind acum proprietatea (L) avem

$$\|u_h(x+h)-v_h(x+h)\| \le (1+hL)\|u_h(x)-v_h(x)\| + h\|S_h(x)\| \le$$
$$\le e^{hL}(\|\sigma_h\|+(x-a)\max_{t\in[a,b]_h}\|S_h(t)\|)e^{L(x-a)} + h\|S_h(x)\| \le (\|\sigma_h\|+(x+h-a)\max_{t\in[a,b]_h}\|S_h(t)\|)e^{L(x+h-a)}$$

(ii) Este suficient să observăm relaţia

$$D_hu_h(x)-D_hv_h(x) = h(f_h(x,u_h(x))-f_h(x,v_h(x)))-S_h(x)$$

şi să folosim (i).

(iii) Pentru $h\le h_0$ avem

$$\max_{x\in[a,b]_h}\|u_h(x)-v_h(x)\| + \max_{x\in\in[a,b]'_h}\|D_hu_h(x)-D_hv_h(x)\| \le ((c+cL+1)(\|\sigma_h\| + \max_{t\in[a,b]_h}\|S_h(t)\|)$$

Fie $\varepsilon>0$. Dacă definim $\eta_\varepsilon = \min(\delta_0, \frac{\varepsilon}{1+c+cL})$, stabilitatea metodei de aproximare este probată.

10.4 Metoda de aproximare Euler

În cazul metodei de aproximare Euler se definesc ecuaţiile apropiate astfel:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_h(x+h)-u_h(x)}{h} = f(x,u_h(x)), x\in[a,b]_h' \\ u_h(a)=\alpha \end{cases}.$$

Teorema 10. 5. *Sunt adevărate*:

(i) *Dacă există* $r > 0$, *astfel încât* $f \in C(G_r)$, *atunci metoda Euler este consistentă cu Problema Cauchy* (2).
(ii) *Presupunem că există* $r > 0$, *există* $L_0 > 0$ *astfel încât pentru orice* $(x,y),(x,y') \in G_r$ *avem* $\|f(x,y) - f(x,y')\| \le L_0\|y - y'\|$. *Atunci funcțiile* $(f_h)_h$ *îndeplinesc condiția* (8) *de tip* (L).
(iii) *Dacă există* $r > 0$, *astfel încât* $f \in C^1(G_r)$, *atunci metoda Euler este consistentă de ordinul întâi cu Problema Cauchy* (2).

Demonstrație. (i) Rezultă imediat prin aplicarea Teoremei 10.1. (ii) Condiția este îndeplinită pentru $G_r, L = L_0, h_0 = b - a$. ($ii$) Eroarea de trunchiere în acest caz este: $T_h(x) = \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} - f(x,u(x)), x \in [a,b]_h'$.

Pentru orice $x \in [a,b]_h'$ avem:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[u'(t) - u'(x)]dt,$$

de unde

$$\|T_h(x)\| = \left\|\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x)\right\| \le \max_{t \in [x,x+h]}\|u'(t) - u'(x)\| \le \|u''\|h.$$

Constanta de consistență este $M = \|u''\|$.

10.5 Metoda de aproximare Euler-modificată

În cazul metodei de aproximare Euler-modificată se definesc ecuațiile apropiate astfel:

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{u_h(x+h) - u_h(x)}{h} = f(x + \dfrac{h}{2}, u_h(x) + \dfrac{h}{2} f(x, u_h(x)), x \in [a,b]_h' \\ u_h(a) = \alpha \end{cases}.$$

Teorema 10.6 *Sunt adevărate*:
(i) *Dacă există* $r > 0$ *astfel încât* $f \in C(G_r)$, *atunci metoda Euler-modificată este consistentă cu Problema Cauchy* (5).
(ii) *Presupunem că există* $r > 0$, *există* $L_0 > 0$, *astfel încât pentru orice* $(x,y),(x,y') \in G_r$ *avem* $\|f(x,y) - f(x,y')\| \le L_0\|y - y'\|$. *Atunci funcțiile* $(f_h)_h$ *îndeplinesc condiția* (8) *de tip* (L).

(iii) Dacă există $r>0$, astfel încât $f \in C^2(G_r)$, atunci metoda Euler-modificată este consistentă de ordinul doi cu Problema Cauchy (2).

Demonstrație.(i) Folosim Teorema 10.1. Pentru $x \in [a,b]_h'$,

$$(x+\frac{h}{2}, u(x)+\frac{h}{2}f(x,u(x))) \in G_r \Leftrightarrow \left\| u(x+\frac{h}{2})-u(x)-\frac{h}{2}f(x,u(x))\right\| \le r.$$

Avem $\left\| u(x+\frac{h}{2})-u(x)-\frac{h}{2}f(x,u(x))\right\| \le \left\| u(x+\frac{h}{2})-u(x)\right\| + \frac{h}{2}\|u'\| \le h\|u'\|$.

Dacă alegem $h \le \frac{r}{\|u'\|}$ atunci $(x+\frac{h}{2}, u(x)+\frac{h}{2}f(x,u(x))) \in G_r$.

Funcţia f este uniform continuă pe compactul G_r. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$, există $\eta_\varepsilon>0$, astfel încât pentru orice $(t,y),(t',y') \in G_r$, cu proprietatea $|t-t'|<\eta_\varepsilon, \|y-y'\|<\eta_\varepsilon$ avem $\|f(t,y)-f(t',y')\| < \varepsilon$.

Prin urmare

$$\left\| f(x+\frac{h}{2}, u(x)+\frac{h}{2}f(x,u(x)))-f(x,u(x))\right\| < \varepsilon, \text{ dacă } h<\min(2\eta_\varepsilon, \frac{2\eta_\varepsilon}{\|u'\|}),$$

deoarece $\left\| u(x)+\frac{h}{2}u'(x)-u(x)\right\| \le \frac{h}{2}\|u'\|$.

Am obţinut relaţia $\lim_{h\to 0} \max_{x\in[a,b]_h'} \|f_h(x,u(x))-f(x,u(x))\| = 0$.

(ii) Fie $r_1>0, r_1<r$. Pentru $(x,y),(x,y') \in G_{r_1}$ avem

$$\|f_h(x,y)-f_h(x,y')\| = \left\| f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y))-f(x+\frac{h}{2}, y'+\frac{h}{2}f(x,y'))\right\|$$

Este adevărat $(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)) \in G_r \Leftrightarrow \left\| u(x+\frac{h}{2})-y-\frac{h}{2}f(x,y)\right\| \le r$.

Dacă punem $M_0 = \max_{(t,y)\in G_r} \|f(t,y)\|$ avem

$$\left\| u(x+\frac{h}{2})-y-\frac{h}{2}f(x,y)\right\| \le \left\| u(x+\frac{h}{2})-u(x)\right\| + \|u(x)-y\| + \frac{h}{2}\|f(x,y\| \le hM_0+r_1$$

Dacă alegem h astfel încât sa îndeplinească şi condiţia $hM_0+r_1 \le r$, punctele $(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)),(x+\frac{h}{2}, y'+\frac{h}{2}f(x,y')) \in G_r$ şi din ipoteză avem

$$\|f_h(x,y)-f_h(x,y')\| \le L_0(\|y-y'\|+\frac{h}{2}\|f(x,y)-f(x,y')\|) \le L_0(1+\frac{h_0}{2}L_0)\|y-y'\|,$$

unde $h_0 = \min(b-a, \frac{r-r_1}{M_0})$. Condiţia ($L$) este îndeplinită pentru r_1, h_0 obţinuţi mai sus şi $L = L_0(1+\frac{h_0}{2}L_0)$.

(iii) Eroarea de trunchiere în acest caz este

$$T_h(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - f(x+\frac{h}{2}, u(x)+\frac{h}{2}f(x,u(x))), x \in [a,b]_h'.$$

Fie $u=(u_1,\dots,u_n), f=(f_1,\dots,f_n)$. Pentru $i \in \overline{1,n}$ şi $x \in [a,b]_h'$ folosind Formula trapezelor cu tangentă la integrare avem

$$\frac{u_i(x+h)-u_i(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} u_i'(t)dt = u_i'(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{24}u'''(\varsigma_i), \varsigma_i \in [x,x+h].$$

Prin urmare

$$|(T_h(x))_i| \le \frac{h^2}{24}\|u'''\| + \left|f_i(x+\frac{h}{2}, u(x+\frac{h}{2})) - f_i(x+\frac{h}{2}, u(x)+\frac{h}{2}u'(x))\right|, x \in [a,b]_h'$$

Deoarece $f \in C^2(G_r)$ există $L_0 = \max\limits_{\substack{1\le i\le n \\ (t,y)\in G_r}} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i(t,y)}{\partial y_k}\right|$ care satisface condiţia din propoziţia (ii). Dacă alegem $h \le \frac{r}{\|u'\|}$ atunci $(x+\frac{h}{2}, u(x)+\frac{h}{2}f(x,u(x))) \in G_r$ şi prin urmare

$$|(T_h(x))_i| \le \frac{h^2}{24}\|u'''\| + L_0\left\|u(x+\frac{h}{2}) - u(x) - \frac{h}{2}u'(x)\right\|, x \in [a,b]_h'.$$

Pentru $i \in \overline{1,n}$ şi $x \in [a,b]_h'$ folosim formula lui Taylor şi avem:

$$u_i(x+\frac{h}{2}) = u_i(x) + \frac{h}{2}u_i'(x) + \frac{h^2}{8}u''_i(\xi_i), \xi_i \in (x, x+\frac{h}{2}),$$

de unde $\left\|u(x+\frac{h}{2}) - u(x) - \frac{h}{2}u'(x)\right\| \le \frac{h^2}{8}\|u''\|, x \in [a,b]_h'$.

Prin urmare $\|T_h(x)\| \le \frac{h^2}{24}(\|u'''\| + 3L_0\|u''\|), x \in [a,b]_h'$. Constanta de consistenţă este $M = \frac{1}{24}(\|u'''\| + 3L_0\|u''\|)$.

10.6 Metoda de aproximare Euler-Cauchy

În cazul metodei de aproximare Euler-Cauchy se definesc ecuațiile apropiate astfel:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_h(x+h)-u_h(x)}{h}=\dfrac{1}{2}[f(x,u_h(x))+f(x+h,u_h(x)+hf(x,u_h(x)))], x\in[a,b]_h' \\ u_h(a)=\alpha \end{cases}.$$

Teorema 10. 7. *Sunt adevărate*:
(*i*) *Dacă există* $r>0$ *astfel încât* $f\in C(G_r)$, *atunci metoda Euler-Cauchy este consistentă cu Problema Cauchy* (2).
(*ii*) *Presupunem că există* $r>0$, *există* $L_0>0$, *astfel încât pentru orice* $(x,y),(x,y')\in G_r$ *avem* $\|f(x,y)-f(x,y')\|\le L_0\|y-y'\|$, *atunci funcțiile* $(f_h)_h$ *îndeplinesc condiția* (8) *de tip* (*L*).
(*iii*) *Dacă există* $r>0$ *astfel încât* $f\in C^2(G_r)$, *atunci metoda Euler-Cauchy este consistentă de ordinul doi cu Problema Cauchy* (2).

Demonstrație.(*i*) Folosim Teorema 10.1. Pentru $x\in[a,b]_h'$,

$$(x+h,u(x)+hf(x,u(x))\in G_r \Leftrightarrow \|u(x+h)-u(x)-hf(x,u(x))\|\le r.$$

Avem $\|u(x+h)-u(x)-hf(x,u(x))\|\le\|u(x+h)-u(x)\|+h\|u'\|\le 2h\|u'\|$.

Dacă alegem $h\le\dfrac{r}{2\|u'\|}$ atunci $(x+h,u(x)+hf(x,u(x))\in G_r$.

Funcția f este uniform continuă pe compactul G_r. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$, există $\eta_\varepsilon>0$, astfel încât pentru orice $(t,y),(t',y')\in G_r$, cu proprietatea $|t-t'|<\eta_\varepsilon, \|y-y'\|<\eta_\varepsilon$ avem $\|f(t,y)-f(t',y')\|<\varepsilon$.
Prin urmare

$\|f(x+h,u(x)+hf(x,u(x)))-f(x,u(x))\|<\varepsilon$, dacă $h<\min(\eta_\varepsilon,\dfrac{\eta_\varepsilon}{\|u'\|})$,

deoarece $\|u(x)+hu'(x)-u(x)\|\le h\|u'\|$.

Am obținut relația $\lim\limits_{h\to 0}\max\limits_{x\in[a,b]_h'}\|f_h(x,u(x))-f(x,u(x))\|=0$.

(*ii*) Fie $r_1>0, r_1<r$. Pentru $(x,y),(x,y')\in G_{r_1}$ avem:

$$\|f_h(x,y)-f_h(x,y')\|\le\frac{1}{2}\|f(x,y)-f(x,y')\|+\frac{1}{2}\|f(x+h,y+hf(x,y))-f(x+h,y'+hf(x,y'))\|$$

Este adevărat $(x+h, y+hf(x,y)) \in G_r \Leftrightarrow \|u(x+h)-y-hf(x,y)\| \le r$.

Dacă punem $M_0 = \max_{(t,y)\in G_r} \|f(t,y)\|$ avem

$\|u(x+h)-y-hf(x,y)\| \le \|u(x+h)-u(x)\| + \|u(x)-y\| + h\|f(x,y\| \le 2hM_0 + r_1$

Dacă alegem h astfel încât să îndeplinească şi condiţia $2hM_0 + r_1 \le r$, punctele $(x+h, y+hf(x,y)), (x+h, y'+hf(x,y')) \in G_r$ şi din ipoteză avem

$$\|f_h(x,y)-f_h(x,y')\| \le L_0\|y-y'\| + \frac{L_0^{\,2}h}{2}\|y-y'\| \le L_0(1+\frac{h_0}{2}L_0)\|y-y'\|$$

unde $h_0 = \min(b-a, \dfrac{r-r_1}{2M_0})$. Condiţia (L) este îndeplinită pentru r_1 şi h_0 obţinuţi mai sus şi $L = L_0(1+\dfrac{h_0}{2}L_0)$. (iii) Eroarea de trunchiere în acest caz este

$$T_h(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{1}{2}[f(x,u(x)) + f(x+h, u(x)+hf(x,u(x)))], x \in [a,b]'_h.$$

Fie $u = (u_1,\dots,u_n), f = (f_1,\dots,f_n)$. Pentru $i \in \overline{1,n}$ şi $x \in [a,b]'_h$, folosind formula trapezelor la integrare avem

$$\frac{u_i(x+h)-u_i(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} u_i'(t)dt = \frac{1}{2}[u_i'(x)+u_i'(x+h)] - \frac{h^2}{12}u'''(\varsigma_i), \varsigma_i \in [x, x+h].$$

Prin urmare

$$|(T_h(x))_i| \le \frac{h^2}{12}\|u'''\| + |f_i(x+h, u(x+h)) - f_i(x+h, u(x)+hu'(x))|, x \in [a,b]'_h.$$

Deoarece $f \in C^2(G_r)$, există $L_0 = \max_{\substack{1\le i\le n \\ (t,y)\in G_r}} \sum_{k=1}^{n} \left|\dfrac{\partial f_i(t,y)}{\partial y_k}\right|$ care satisface condiţia din propoziţia (ii). Dacă alegem $h \le \dfrac{r}{2\|u'\|}$ atunci $(x+h, u(x)+hf(x,u(x)) \in G_r$ şi prin urmare

$$|(T_h(x))_i| \le \frac{h^2}{24}\|u'''\| + L_0\|u(x+h)-u(x)-hu'(x)\|, x \in [a,b]'_h.$$

Pentru $i \in \overline{1,n}$ şi $x \in [a,b]'_h$ folosim formula lui Taylor şi avem

$$u_i(x+h) = u_i(x) + hu_i'(x) + \frac{h^2}{2}u''_i(\xi_i), \xi_i \in (x, x+\frac{h}{2}),$$

de unde $\|u(x+h)-u(x)-hu'(x)\| \le \frac{h^2}{2}\|u''\|, x \in [a,b]'_h$.

Prin urmare $\|T_h(x)\| \le \frac{h^2}{12}(\|u'''\| + 3L_0\|u''\|), x \in [a,b]'_h$. Constanta de consistență este $M = \frac{1}{12}(\|u'''\| + 3L_0\|u''\|)$.

10.7 Metoda de aproximare Runge-Kutta

Vom considera funcțiile

$$\left.\begin{aligned} k_0(x,y) &= f(x,y) \\ k_1(x,y) &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_0(x,y)\right) \\ k_2(x,y) &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1(x,y)\right) \\ k_3(x,y) &= f(x+h, y+hk_2(x,y)) \end{aligned}\right\}, (x,y) \in [a,b] \times R^n.$$

În cazul metodei de aproximare Runge-Kutta se definesc ecuațiile apropiate astfel:

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{u_h(x+h)-u_h(x)}{h} = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{j=0}^{3} a_j k_j(x,u_h(x)), a_0 = a_3 = 1, a_1 = a_2 = 2, x \in [a,b]_h' \\ u_h(a) = \alpha \end{cases}$$

Teorema 10.8 *Sunt adevărate*:
(*i*) *Dacă există* $r > 0$ *astfel încât* $f \in C(G_r)$, *atunci metoda Runge-Kutta este consistentă cu Problema Cauchy* (2).
(*ii*) *Presupunem că există* $r > 0$, *există* $L_0 > 0$ *astfel încât pentru orice* $(x,y),(x,y') \in G_r$ *avem* $\|f(x,y)-f(x,y')\| \le L_0\|y-y'\|$, *atunci funcțiile* $(f_h)_h$ *îndeplinesc condiția* (8) *de tip* (L).
(*iii*) *Dacă există* $r > 0$ *astfel încât* $f \in C^4(G_r)$, *atunci metoda Runge-Kutta este consistentă de ordinul patru cu Problema Cauchy* (2).

Demonstrație. (*i*) Folosim Teorema 10.1. Pentru $x \in [a,b]'_h$,

$$\|f(x,u(x))-f_h(x,u(x))\| \le \frac{1}{3}\|f(x,u(x))-f(x_1,y_1)\| + \frac{1}{3}\|f(x,u(x))-f(x_2,y_2)\| + \frac{1}{6}\|f(x,u(x))-f(x_3,y_3)\|,$$

unde:

$$x_1 = x_2 = x + \frac{h}{2}, x_3 = x + h,$$

$$y_1 = u(x) + \frac{h}{2} f(x, u(x)), y_2 = u(x) + \frac{h}{2} k_1(x, u(x)), y_3 = u(x) + hk_2(x, u(x))$$

Notând $M_0 = \max_{(t,y)\in G_r} \|f(t,y)\|$ avem

$$\|u(x_1) - y_1\| = \left\|u(x + \frac{h}{2}) - u(x) - \frac{h}{2} f(x, u(x))\right\| \le \left\|u(x + \frac{h}{2}) - u(x)\right\| + \frac{h}{2}\|u'\| \le h\|u'\|$$

$$\|u(x_2) - y_2\| = \left\|u(x + \frac{h}{2}) - u(x) - \frac{h}{2} k_1(x, u(x))\right\| \le \left\|u(x + \frac{h}{2}) - u(x)\right\| + \frac{h}{2} M_0 \le \frac{h}{2}\|u'\| + \frac{h}{2} M_0$$

$$\|u(x_3) - y_3\| = \|u(x + h) - u(x) - hk_2(x, u(x))\| \le \|u(x + h) - u(x)\| + hM_0 \le h\|u'\| + hM_0$$

Dacă alegem $h \le \dfrac{r}{\|u'\| + M_0}$ atunci $(x_i, y_i) \in G_r, i = 1,2,3.$.

Funcția f este uniform continuă pe compactul G_r. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice $(t,y),(t',y') \in G_r$, cu proprietatea $|t - t'| < \eta_\varepsilon, \|y - y'\| < \eta_\varepsilon$ avem $\|f(t,y) - f(t',y')\| < \varepsilon$.

Prin urmare: $\|f(x,u(x)) - f_h(x,u(x))\| < \frac{5}{6}\varepsilon < \varepsilon$, dacă $h < \min(\eta_\varepsilon, \frac{\eta_\varepsilon}{M_0})$.

Am obținut relația: $\lim_{h\to 0} \max_{x\in[a,b]_h} \|f_h(x,u(x)) - f(x,u(x))\| = 0$.

(*ii*) Fie $r_1 > 0, r_1 < r$. Pentru $(x,y),(x,y') \in G_{r_1}$ avem

$$\|f_h(x,y) - f_h(x,y')\| \le \frac{1}{6}\|f(x,y) - f(x,y')\| + \frac{1}{3}\|f(x_1,y_1) - f(x_1,y_1')\| + \frac{1}{3}\|f(x_2,y_2) - f(x_2,y_2')\| + \frac{1}{6}\|f(x_3,y_3) - f(x_3,y_3')\|,$$

unde

$$x_1 = x_2 = x + \frac{h}{2}, x_3 = x + h,$$

$$y_1 = y + \frac{h}{2} f(x,y), y_2 = y + \frac{h}{2} k_1(x,y), y_3 = y + hk_2(x,y)$$

$$y_1' = y' + \frac{h}{2} f(x,y'), y_2 = y' + \frac{h}{2} k_1(x,y'), y_3' = y' + hk_2(x,y')$$

Punem $M_0 = \max_{(t,y)\in G_r} \|f(t,y)\|$.

$$\|u(x_1)-y_1\| = \left\|u(x+\frac{h}{2})-y-\frac{h}{2}f(x,y)\right\| \le \left\|u(x+\frac{h}{2})-u(x)\right\| + \|u(x)-y\| + \frac{h}{2}M_0 \le \frac{h}{2}\|u'\| + r_1 + \frac{h}{2}M_0$$

$$\|u(x_2)-y_2\| = \left\|u(x+\frac{h}{2})-y-\frac{h}{2}k_1(x,y)\right\| \le \left\|u(x+\frac{h}{2})-u(x)\right\| + \|u(x)-y\| + \frac{h}{2}M_0 \le \frac{h}{2}\|u'\| + r_1 + \frac{h}{2}M_0$$

$$\|u(x_3)-y_3\| = \|u(x+h)-y-hk_2(x,y)\| \le \|u(x+h)-u(x)\| + \|u(x)-y\| + hM_0 \le h\|u'\| + r_1 + hM_0$$

Dacă alegem h astfel încât să îndeplinească şi condiţia $h \le \dfrac{r-r_1}{M_0+\|u'\|}$, punctele $(x_i,y_i),(x_i,y_i') \in G_r, i=1,2,3.$ şi din ipoteză avem

$$\|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_1')\| \le L_0\|y_1-y_1'\| \le L_0(1+\frac{h}{2}L_0)\|y-y'\|$$

$$\|f(x_2,y_2)-f(x_2,y_2')\| \le L_0\|y_2-y_2'\| \le L_0\|y-y'\| + \frac{h}{2}\|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_1')\| \le$$

$$\le L_0\|y-y'\| + \frac{h}{2}L_0\|y_1-y_1'\| \le L_0(1+\frac{h}{2}L_0+\frac{h^2}{4}L_0^2)\|y-y'\|$$

$$\|f(x_3,y_3)-f(x_3,y_3')\| \le L_0\|y_3-y_3'\| \le L_0\|y-y'\| + h\|f(x_2,y_2)-f(x_2,y_2')\| \le$$

$$\le L_0\|y-y'\| + hL_0\|y_2-y_2'\| \le L_0(1+hL_0(1+\frac{h}{2}L_0+\frac{h^2}{4}L_0^2))\|y-y'\|$$

Pentru $(x,y),(x,y') \in G_{r_1}$, $h \le h_0 = \min(b-a, \dfrac{r-r_1}{M_0+\|u'\|})$ avem

$$\|f_h(x,y)-f_h(x,y')\| \le L\|y-y'\|,$$

unde $L = L_0(1+\dfrac{h_0L_0}{2}+\dfrac{h_0^2L_0^2}{6}+\dfrac{h_0^3L_0^3}{24}) \le L_0e^{h_0L_0}$.

(*iii*) Este suficient să demonstrăm afirmaţia în cazul în care $n=1$.

Vom nota $O(h^4)=h^4g(h,x)$, unde există $K>0, h_0>0$ astfel încât pentru $h \le h_0$, $\sup\limits_{x\in[a,b]_h'} |g(h,x)| \le K$. Eroarea de trunchiere în acest caz este

$$T_h(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - f_h(x,u(x)), x \in [a,b]_h',$$

unde

$$f_h(x,u(x))=\sum_{i=0}^{3}a_i f(x_i,y_i), a_0=a_3=\frac{1}{6}, a_1=a_2=\frac{1}{3}$$

$$x_0=x, x_1=x_2=x+\frac{h}{2}, x_3=x+h,$$

$$y_0=u(x), y_1=u(x)+\frac{h}{2}f(x,u(x)), y_2=u(x)+\frac{h}{2}k_1(x,u(x)), y_3=u(x)+hk_2(x,u(x)).$$

Din formula Simpson la integrare avem

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}u'(t)dt=\frac{1}{6}[u'(x)+4u'(x+\frac{h}{2})+u'(x+h)]-\frac{h^4}{2880}u^{(v)}(\varsigma), \varsigma\in[x,x+h].$$

Din prima parte de demonstrație, dacă alegem $h\le\dfrac{r}{\|u'\|+M_0}$, avem

$(x_i,y_i)\in G_r, i=1,2,3.$ Vom nota $u_i^k=u^{(k)}(x_i), i=1,2,3; k=0,1,2,3.$

Prin urmare $T_h(x)=\sum_{i=1}^{3}a_i[f(x_i,u_i)-f(x_i,y_i)]+O(h^4).$

Dezvoltăm funcțiile u și u' după formula Taylor în jurul punctului $x_1=x_2=x+\dfrac{h}{2}$:

$$u(x)=u_1-\frac{h}{2}u_1'+\frac{h^2}{8}u_1''-\frac{h^3}{48}u_1'''+O(h^4)$$

$$u'(x)=u_1'-\frac{h}{2}u_1''+\frac{h^2}{8}u_1'''+O(h^3)$$

$$u_3=u(x+h)=u_1+\frac{h}{2}u_1'+\frac{h^2}{8}u_1''+\frac{h^3}{48}u_1'''+O(h^4)$$

Dezvoltăm acum f după formula lui Taylor în raport cu al doilea argument

$$f(x_1,y_1)=f(x_1,u_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)(y_1-u_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,\varsigma_1)(y_1-u_1)^2, \varsigma_1\in(y_1,u_1)$$

$$y_1-u_1=-\frac{h^2}{8}u_1''+\frac{h^3}{24}u_1'''+O(h^4).$$

Prin înlocuire în relația de mai sus avem

$$f(x_1,y_1)=f(x_1,u_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)(-\frac{h^2}{8}u_1''+\frac{h^3}{24}u_1''')+O(h^4).$$

Analog avem

$$f(x_2,y_2)=f(x_1,u_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)(y_2-u_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,\varsigma_2)(y_2-u_1)^2,\varsigma_2\in(y_2,u_1)$$

$$y_2-u_1=u(x)+\frac{h}{2}f(x_1,y_1)-u_1=\frac{h^2}{8}u_1''-\frac{h^3}{48}u_1'''-\frac{h^3}{16}u_1''\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)+O(h^4).$$

Prin înlocuire obținem

$$f(x_2,y_2)=f(x_1,u_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)[\frac{h^2}{8}u_1''-\frac{h^3}{48}u_1'''-\frac{h^3}{16}u_1''\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)]+O(h^4).$$

Dezvoltând dupa formula Taylor avem

$$f(x_3,y_3)=f(x_3,u_3)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_3,u_3)(y_3-u_3)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_3,\varsigma_3)(y_3-u_3)^2,\varsigma_3\in(y_3,u_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}f(x_3,u_3)=f(x_1,u_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha,\beta)(x_3-x_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\chi,\delta)(u_3-u_1),(\alpha,\beta),(\chi,\delta)\in(x_1,x_3),(u_1,u_3)$$

Cum $y_3=u(x)+hf(x_2,y_2)$, prin înlocuire avem

$$y_3-u_3=-\frac{h^3}{24}u_1'''+\frac{h^3}{8}u_1''\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)+O(h^4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}f(x_3,u_3)=f(x_1,u_1)+O(h)$$

$$f(x_3,y_3)=f(x_3,u_3)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)[-\frac{h^3}{24}u_1'''+\frac{h^3}{8}u_1''\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,u_1)]+O(h^4).$$

Am arătat astfel că $T_h(x)=O(h^4)$.

10.8 Metoda de aproximare Taylor

În cazul metodei de aproximare Taylor vom presupune că există $r>0$ astfel încât $f\in C^m(G_r)$. Pentru $f=(f_1,\dots,f_n)$ notăm:

$f^0(x,y)=f(x,y)$, $(x,y)\in G_r$,

$$f^k(x,y)=(\frac{\partial f_l^{k-1}}{\partial x}(x,y)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l^{k-1}}{\partial y_i}(x,y)f_i(x,y))_{1\le l\le n},k=\overline{1,m-1},(x,y)\in G_r$$

şi construim $f_h(x,y)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{h^k}{(k+1)!}f^k(x,y)$, $(x,y)\in G_r$.

Se definesc ecuațiile apropiate astfel:

$$(16)\qquad \begin{cases}\frac{u_h(x+h)-u_h(x)}{h}=f_h(x,u_h(x))\\ u_h(a)=\alpha\end{cases}.$$

Teorema 10.9 *Sunt adevărate:*
(*i*) *Funcțiile* $(f_h)_h$ *îndeplinesc condiția* (8) *de tip* (L).
(*ii*) *MetodaTaylor este consistentă de ordinul m cu Problema Cauchy* (2).

Demonstrație.(*i*) Deoarece $f \in C^m(G_r)$, funcțiile $f^k, k = \overline{0,m-1}$ satisfac o condiție de tip Lipschitz pe G_r. Pentru $0 \le k \le m-1$, există

$$L_k = \sup_{(x,y)\in G_r} \max_{1\le l\le n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f_l}{\partial y_i}(x,y) \right|,$$

astfel încât pentru orice $(x,y),(x,y') \in G_r$ avem

$$\left\| f^k(x,y) - f^k(x,y') \right\| \le L_k \left\| y - y' \right\|.$$

Prin urmare pentru orice $(x,y),(x,y') \in G_r$ avem

$$\left\| f_h(x,y) - f_h(x,y') \right\| \le \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_0^{\,k}}{(k+1)!} L_k\right) \left\| y - y' \right\|,$$

unde $h_0 = b - a$.

(*ii*) Calculăm eroarea de trunchiere. Pentru $x \in [a,b]'_h$:

$$f^0(x,u(x)) = u'(x),$$

$$f^k(x,u(x)) = \left(\frac{\partial f_l^{k-1}}{\partial x}(x,u(x)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l^{k-1}}{\partial y_i}(x,u(x)) u'_i(x)\right)_{1\le l\le n} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_l^{k-1}(x,u(x))\right)_{1\le l\le n} = u^{(k+1)}(x), k = \overline{1,m-1}$$

$$T_h(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \sum_{k=1}^{m} \frac{h^{k-1}}{k!} u^{(k)}(x).$$

Folosim acum formula lui Taylor pentru u

$$u(x+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{h^k}{k!} u^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} u^{(k+1)}(\varsigma), \varsigma \in (x, x+h)$$

și obținem $\left\| T_h(x) \right\| \le \dfrac{\left\| u^{(m+1)} \right\|}{(m+1)!} h^m$.

Exemplu. *Pentru ecuația* $u' = u, x \in [0,1], u(0) = 1$, *soluția ecuației este* $u(x) = e^x$. *Ecuațiile apropiate*

$$u_h(x+h) = u_h(x) + h f_h(x, u_h(x)), x \in [0,1]'_h$$

în cazul metodelor studiate sunt definite de următoarele funcții:

- *pentru metoda Euler*

$$f_h(x,u_h(x)) = u_h(x)\,;$$

- *pentru metoda Euler modificată*

$$f_h(x,u_h(x)) = u_h(x) + \frac{h}{2}u_h(x)\,;$$

- *pentru metoda Euler –Cauchy*

$$f_h(x,u_h(x)) = u_h(x) + \frac{h}{2}u_h(x)\,;$$

- *pentru metoda Runge-Kutta*

$$f_h(x,u_h(x)) = u_h(x)(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!})\,;$$

- *pentru metoda Taylor*

$$f_h(x,u_h(x)) = u_h(x)(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \ldots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!}).$$

Bibliografie

[1] Abramowitz, M., Stegun, I., *Handbook of mathematical functions,* National Bureau of Standards, Applied Mathematics, Series 55, 1964.

[2] Akilov, G. P., Kantorovici, L. V., *Analiză funcțională,* Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, 1977.

[3] Bourbaki, N., *General Topology*, vol I, II, Hermann, Paris, Addison-Wesley, Reading Mass, 1966.

[4] Colojoară, I., Foiaş, C., *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, New York, 1968.

[5] Cristescu, R., *Topological Vector spaces*, Noordhoff Int. Publ. Leyden, The Netherlands, 1977.

[6] Cristescu, R., *Noțiuni de analiză funcțională liniară,* Editura Academiei Române, Bucureşti 1998.

[7] Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear Operators,* Part I: *General Theory*, Interscience, New York, 1958.

[8] Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear Operators,* Part II: *Spectral Theory*, Interscience, New York, 1963.

[9] Farkaş, W., Pavel, L., *Analiză funcțională-Exerciții şi probleme*, Editura Universității Bucureşti, 1994.

[10] Folland, G., *Real Analysis*, Wiley-Interscience, 1984.

[11] Gastinel, N., *Analyse numérique linéaire*, Hermann; Paris, 1966.

[12] Gheorghiu, N., *Introducere în analiză funcțională*, Editura Academiei, Bucureşti, 1974.

[13] Gohberg, I., Goldberg, S., *Bazic Operator Theory*, Birkhauser Boston, 1981.

[14] Grigore, Gh., *Lecții de analiză numerică*, Universitatea Bucureşti, 1984.

[15] Ichim, I., Marinescu, Gh., *Metode de aproximare numerică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[16] Mardon, J. Cl., Sibony, M., *Approximations et équations différentielles*, Hermann, Paris, 1984.

[17] Mardon, J. Cl., Sibony, M., *Systèmes linéaires et nonlinéaires*, Hermann, Paris, 1984.

[18] Marinescu, Gh., *Analiză numerică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1984.

[19] Marinescu, Gh., Rizzoli, I., Popescu, I., Ştefan, C., *Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul*, Editura academiei, Bucureşti, 1987.

[20] Pavel, L., *An Introduction to Functional Analysis*, Editura Universității Bucureşti, 2000.

[21] Pedersen, G., *Analysis Now*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1989.

[22] Popescu, I., Rizzoli, I., Ştefan, C., *Caiet de laborator de analiză numerică*, Universitatea Bucureşti, 1981.

[23] Popescu, I., Rizzoli, I., Ştefan, C., *Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul*, Universitatea Bucureşti, 1983.

[24] Reed, M., Simon, B., *Methods of modern mathematical physics*, Vol I., *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.

[25] Rizzoli, I., *Integral formulas for interpolation polynomials*, Math. Reports, Vol 2(52), No. 2., 2000.

[26] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[27] Stummel, F., Hainer, K., *Praktische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1971.

[28] Taylor, A. E., Lay, D. C. *Introduction to Functional Analysis*, 2nd Ed., Wiley, New York, 1980.

[29] De Vito, C., *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1978.

[30] Yosida, K., *Functional Analysis*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin, New York, 1968.

Tiparul s-a executat sub cda 947/2002
la Tipografia Editurii Universităţii din Bucureşti

155 000 lei.

Lucrarea de fața conține elemente de analiză funcțională şi de analiză numerică. Analiza numerică este un domeniu al matematicii apărut relativ recent ca rezultat al utilizării calculatoarelor în rezolvarea unor probleme matematice. Rezultatele de bază ale ei sunt furnizate de analiza funcțională, care îi împrumută şi metode sau tehnici.

Toate acestea se regăsesc în această carte care este obiectul cursurilor de Analiză funcțională şi Analiză numerică, pentru studenții facultăților de matematică. Prin urmare, ea se adreseaza acestora, dar şi studenților de la facultățile tehnice, matematicienilor şi tuturor celor ce doresc o introducere în studiul celor douădiscipline.

ISBN 973-575-671-4